

# 大学初年次における数学教材の提案（その 10）

## ～四元数入門～

貴田 研司\*<sup>1</sup>

### Suggestion about Mathematical Material for Freshman Education Vol.10 ～ Introduction to Quaternion ～

by

Kenshi KIDA \*<sup>1</sup>

( received on May26, 2017 & accepted on Jul.13, 2017 )

#### あらまし

非可換体の典型的な例であるハミルトンの四元数について、定義を述べた後で分配法則および結合法則が成り立つことや逆元の存在について述べるなどして、可換ではない体であることを示した。さらに、四元数を係数とする代数方程式についても、係数が複素数の場合とは様相が異なることを示した。

#### Abstract

First, we define skew field of Hamilton quaternions which is typical example of non-commutative field. Further, we prove that quaternion is non-commutative field by showing that distributivity and associativity are true, inverses exist and so on. Next, algebraic equations over  $\mathbf{H}$  differ from over  $\mathbf{C}$  in situation.

キーワード: 四元数, 非可換体, 回転, 量子ウォーク

Keywords: Quaternion, Non-Commutative field, Rotation, Quantum Walk

## 1. はじめに

大学初年次の代数学では、群、環、体などの代数系について学ぶ。斜体（可換でない体、非可換体）の典型的な、そして歴史的に最初の例は、ハミルトンの四元数（または四元数体）である。まずこの章では、定義から始めて、特に分配法則および結合法則が成り立つことを示す<sup>1)2)3)4)5)6)7)</sup>。

$\mathbf{H}$  を  $\{e, v_1, v_2, v_3\}$  を基底とする実数体  $\mathbf{R}$  上の 4 次元ベクトル空間、すなわち

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}e + \mathbf{R}v_1 + \mathbf{R}v_2 + \mathbf{R}v_3$$

とする。そして、基底ベクトルの積を次の乗積表のように定める。

$\cdot$	$e$	$v_1$	$v_2$	$v_3$
$e$	$e$	$v_1$	$v_2$	$v_3$
$v_1$	$v_1$	$-e$	$v_3$	$-v_2$
$v_2$	$v_2$	$-v_3$	$-e$	$v_1$
$v_3$	$v_3$	$v_2$	$-v_1$	$-e$

このとき、 $\mathbf{H}$  の任意の 2 つのベクトル

\*1 高輪教養教育センター 准教授  
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus,  
Associate Professor

$$\mathbf{u} = a_0 \mathbf{e} + a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + a_3 \mathbf{v}_3, \quad \mathbf{v} = b_0 \mathbf{e} + b_1 \mathbf{v}_1 + b_2 \mathbf{v}_2 + b_3 \mathbf{v}_3 \quad (\text{各 } a_i, b_j \in \mathbf{R})$$

に対して、 $\mathbf{R}$  の元は  $\mathbf{H}$  のすべての元と可換とし、あとは分配法則が成り立つように、これらの積を

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (a_0 \mathbf{e} + a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + a_3 \mathbf{v}_3) \cdot (b_0 \mathbf{e} + b_1 \mathbf{v}_1 + b_2 \mathbf{v}_2 + b_3 \mathbf{v}_3) \\ &= a_0 b_0 \mathbf{e} \mathbf{e} + a_0 b_1 \mathbf{e} \mathbf{v}_1 + a_0 b_2 \mathbf{e} \mathbf{v}_2 + a_0 b_3 \mathbf{e} \mathbf{v}_3 + a_1 b_0 \mathbf{v}_1 \mathbf{e} + a_1 b_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1 + a_1 b_2 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 + a_1 b_3 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3 \\ &\quad + a_2 b_0 \mathbf{v}_2 \mathbf{e} + a_2 b_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1 + a_2 b_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2 + a_2 b_3 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 + a_3 b_0 \mathbf{v}_3 \mathbf{e} + a_3 b_1 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_1 + a_3 b_2 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_2 + a_3 b_3 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3 \\ &= a_0 b_0 \mathbf{e} + a_0 b_1 \mathbf{v}_1 + a_0 b_2 \mathbf{v}_2 + a_0 b_3 \mathbf{v}_3 + a_1 b_0 \mathbf{v}_1 + a_1 b_1 (-\mathbf{e}) + a_1 b_2 \mathbf{v}_3 + a_1 b_3 (-\mathbf{v}_2) \\ &\quad + a_2 b_0 \mathbf{v}_2 + a_2 b_1 (-\mathbf{v}_3) + a_2 b_2 (-\mathbf{e}) + a_2 b_3 \mathbf{v}_1 + a_3 b_0 \mathbf{v}_3 + a_3 b_1 \mathbf{v}_2 + a_3 b_2 (-\mathbf{v}_1) + a_3 b_3 (-\mathbf{e}) \\ &= (a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3) \mathbf{e} + (a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{v}_1 + (a_0 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_0 + a_3 b_1) \mathbf{v}_2 \\ &\quad + (a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0) \mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

と定義する。さらに結合法則が成り立つことは、以下の計算

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1 &= -\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1), & (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_2 &= -\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2), & (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_3 &= -\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3), \\ (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1), & (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_2 &= -\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2), & (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_3 &= -\mathbf{e} = \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3), \\ (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_1), & (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e} = \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_2), & (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_3 &= -\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3), \\ (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1 &= -\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1), & (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2), & (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e} = \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3), \\ (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_1 &= -\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1), & (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_2 &= -\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2), & (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_3 &= -\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3), \\ (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_1 &= -\mathbf{e} = \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_1), & (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_2), & (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_3 &= -\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3), \\ (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_1 &= -\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3 (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1), & (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_2 &= -\mathbf{e} = \mathbf{v}_3 (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2), & (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_1) \mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_3 (\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3), \\ (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e} = \mathbf{v}_3 (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_1), & (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_2 &= -\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3 (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2), & (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_2) \mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 (\mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3), \\ (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_1 &= -\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_3 (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_1), & (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_2 &= -\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_2), & (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_3 &= -\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3 (\mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3) \end{aligned}$$

によって示される。

以後は

$$\mathbf{e} = 1_{\mathbf{H}}, \mathbf{v}_1 = i, \mathbf{v}_2 = j, \mathbf{v}_3 = k$$

と書くことにして、新しい数  $i, j, k$  を導入すると、上の乗積表は

$\cdot$	$1_{\mathbf{H}}$	$i$	$j$	$k$
$1_{\mathbf{H}}$	$1_{\mathbf{H}}$	$i$	$j$	$k$
$i$	$i$	$-1_{\mathbf{H}}$	$k$	$-j$
$j$	$j$	$-k$	$-1_{\mathbf{H}}$	$i$
$k$	$k$	$j$	$-i$	$-1_{\mathbf{H}}$

と書き換えられる。そこで、改めて四元数を

$$a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \quad (\text{ただし, } a_0 = a_0 \cdot 1_{\mathbf{H}} \text{ とする; 各 } a_l \in \mathbf{R})$$

と表すことにする。ここで、 $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$  の場合の  $a_0 = a_0 \cdot 1$  を実数、 $a_2 = 0, a_3 = 0$  の場合の

$a_0 + a_1 i$  を複素数と同一視する.

## 2. 共役四元数とノルム

四元数  $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$  に対して, ノルムを

$$|q| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

で定義し, さらに

$$N(q) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

と表す.

そこで,  $q$  の共役四元数を

$$\bar{q} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$$

と定義すると

$$q\bar{q} = \bar{q}q = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 (= N(q))$$

が成り立つ.

したがって,  $q \neq 0$  に対しては,  $N(q) \neq 0$  であり

$$q' = \frac{1}{N(q)} \bar{q} = \frac{1}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} (a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k) \in \mathbf{H}$$

とおくと  $q \cdot q' = q' \cdot q = 1$  すなわち  $q' = q^{-1}$  である.

よって, ハミルトンの四元数  $\mathbf{H}$  は, 斜体 (可換でない体, 非可換体) である<sup>1)2)</sup>.

また, 2つの四元数  $\alpha, \beta$  に対して

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha \cdot \beta} = \bar{\beta} \cdot \bar{\alpha}$$

が成り立つ. ここで, 環  $\mathbf{H}$  から環  $\mathbf{R}$  への写像  $f$  を, 四元数にノルムを対応させる写像を

$$f(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

で定めると, 上の性質は

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta), \quad f(\alpha \cdot \beta) = f(\beta) \cdot f(\alpha)$$

を示しており, これは写像  $f$  が逆準同型 (anti-homomorphism) であることを示している<sup>1)2)</sup>.

## 3. 四元数の代数方程式

複素数体  $\mathbf{C}$  を係数とする代数方程式については, 以下のことが知られている<sup>8)</sup>.

定理 (代数学の基本定理)

複素数体  $\mathbf{C}$  上の任意の多項式  $f(t) \in \mathbf{C}[t]$  は有限個の 1 次単項多項式と複素数の積として一意的に表される。すなわち、有限個の複素数  $k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbf{C}$  が一意的に存在して

$$f(t) = k(t - \alpha_1)(t - \alpha_2) \cdots (t - \alpha_n)$$

となる。■

この代数学の基本定理より、複素数係数の  $n$  次方程式は、ちょうど  $n$  個 (重解を含めて) の複素数の解をもつことがわかる。ところが、範囲を四元数まで広げると様相が異なる<sup>1)6)</sup>。

例えば、2次方程式  $x^2 + 1 = 0$  は複素数の範囲では  $x = \pm i$  の 2 個しかない。もちろん四元数の範囲では  $x = \pm i, \pm j, \pm k$  も解であることは明らかであるが、以下に、無数の解をもつことを示す。このことは、等式

$$(x + i)(x - i) = x^2 + ix - xi + 1$$

において、四元数においては  $ix = xi$  すなわち  $ix - xi = 0$  が必ずしも成り立たないために、一般には

$$(x + i)(x - i) = x^2 + 1$$

とはならないことに起因している。それでは、2次方程式  $x^2 + 1 = 0$  の四元数の解をすべて求めることにする。もし

$$\alpha = a + bi + cj + dk \in \mathbf{H} \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R})$$

が解であるとすれば

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= (a + bi + cj + dk)^2 \\ &= (a^2 - b^2 - c^2 - d^2) + 2abi + 2acj + 2adk \\ &= -1 \end{aligned}$$

であるから

$$a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = -1, ab = 0, ac = 0, ad = 0$$

が得られる。ここで、 $a \neq 0$  ならば  $b = 0, c = 0, d = 0$  より  $a^2 = -1$  となるが、このような実数  $a$  は存在しないことから、 $a = 0$  であることがわかる。

よって  $b^2 + c^2 + d^2 = 1$  が得られるので、求める解は次のような四元数

$$x = bi + cj + dk \quad (\text{ただし, } b^2 + c^2 + d^2 = 1)$$

であり、無数にあることがわかる。

一方、例えば  $ix - xi = 1$  は、四元数の解をもたないことが以下のようにして示される。

もし

$$\alpha = a + bi + cj + dk \in \mathbf{H} \quad (a, b, c, d \in \mathbf{R})$$

が解であるならば

$$\begin{aligned} i\alpha - \alpha i &= i(a + bi + cj + dk) - (a + bi + cj + dk)i \\ &= ai - b + ck - dj - (ai - b - ck + dj) \\ &= -2dj + 2ck = 1 \end{aligned}$$

であるが, どのような実数  $c, d$  に対しても  $-2dj + 2ck = 1$  は成り立たない.

よって,  $ix - xi = 1$  は, 四元数の解をもたないことがわかる.

#### 4. おわりに

非可換体である四元数における可除性の概念については, 笠原久弘訳「超複素数入門—多元環へのアプローチ」<sup>9)</sup>などを参考にされたい. また, 四元数との密接な対応があるパウリ行列とは次の 3 つの行列

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

のことであり, さらに

$$Q_i = i\sigma_z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, Q_j = i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, Q_k = i\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$Q_i^2 = -E, Q_j^2 = -E, Q_k^2 = -E, Q_i Q_j = -Q_j Q_i = Q_k, Q_j Q_k = -Q_k Q_j = Q_i, Q_k Q_i = -Q_i Q_k = Q_j$$

が成り立つ<sup>3)5)</sup>.

さて, 絶対値が 1 の複素数を他の複素数にかける操作が座標平面上の原点を中心とする回転であることに類似して, ノルムが 1 の四元数を他の四元数にかける操作が, 座標空間内の原点を通る直線の周りの回転であるという事実がある<sup>1)10)</sup>.

さらに, 量子力学における, 四元数を用いたモデルである四元数量子ウォークは, 複素数を用いたモデルである量子ウォークを拡張したモデルとなっている<sup>1)5)</sup>.

#### 参考文献

- 1) 岩永恭雄「代数学の基礎」日本評論社, 2002
- 2) 服部昭「現代代数学」朝倉書店, 1968
- 3) 服部昭「群とその表現」共立出版, 1967
- 4) 松村英之「代数学」朝倉書店, 1990
- 5) 今野紀雄「四元数」森北出版, 2016
- 6) 矢野忠「四元数の発見」海鳴社, 2014
- 7) 堀源一郎「ハミルトンと四元数」海鳴社, 2007
- 8) 本間龍雄監修, 高橋渉編「数学定理・公式小辞典」聖文社, 1992
- 9) カントール, ソロドブニコフ著, 浅野洋監訳, 笠原久弘訳「超複素数入門—多元環へのアプローチ」森北出版, 1990
- 10) 金谷一朗「3D-CGプログラマーのためのクォータニオン入門[増補版]」工学社, 2015