東海大学紀要情報通信学部
Vol.9,No.2,2016,pp.19-23

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 4）
～連続関数の厳密な定義～

貴田 研司[*1]

Suggestion about Mathematical Material for Freshman Education Vol.4
~Strict Definition of Continuous Function~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on Nov. 22, 2016 & accepted on Dec. 21, 2016)

あらまし
高校で学ぶ微分積分において, 関数の極限や連続性などについては直感的な定義がされている. 大学初年次における微分積分でも同様である. しかし, ε－δ 論法を用いての論理的に厳密な取扱いができることも重要と考える. ε－δ 論法の入り口の部分を丁寧に解説する.

Abstract
(ε , δ)-Definition of Limit strikes freshmen as difficult. So in this paper, we show strict definition of continuous function by (ε , δ)-Definition of Limit. Further, we give an example, in plain language.

キーワード: ε - δ 論法, 極限値, 連続関数
Keywords: *(ε,δ)-Definition of Limit, Limit Value, Continuous Function*

1. はじめに

大学初年次教育において, 高校数学の延長としての微分積分が置かれている. 1 変数の微分積分で高校では扱わなかったものから始めて, 偏微分や重積分を学ぶ. 概念の取り扱いは直感的に行うのが一般的であるかと思う [1)].

例えば, 関数の極限の直感的な定義は次のようになる. 関数 $f(x)$ について, x が a と異なる値をとりながら限りなく a に近づくとき, $f(x)$ の値が一定の値 b に限りなく近づくならば

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \qquad \text{または} \qquad x\to a \quad \text{のとき} \quad f(x)\to b$$

と表し, b を $x\to a$ のときの $f(x)$ の極限値という. また, “ $x\to a$ のとき $f(x)$ は b に収束する” という.

ところがこれを, ε－δ 論法を用いて論理的に厳密に行うと以下のようになる. $x=a$ の近くで定義された（$x=a$ で定義されなくてもよい）関数 $f(x)$ において, 任意の正の数 ε に対して、適当な正の数 δ を決めると

$$0<|x-a|<\delta \text{ であるすべての } x \text{ に対して } |f(x)-b|<\varepsilon$$

となる.

また、関数の連続の直感的な定義は次のようになる. 関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であるとは, 次の 3 つの条件満たすことをいう.

（1）関数値 $f(a)$ が定義されている.

（2）極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ が存在する.

（3）$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

さらにこれを ε－δ 論法を用いて論理的に厳密に行うと以下のようになる. 関数 $f(x)$ が $x=a$ およびその近くで定義されているとする. 任意の正の数 ε に対して、適当な正の数 δ を決めると

---

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center,Takanawa Campus,
Associate Professor

$$|x-a|<\delta \text{ であるすべての } x \text{ に対して } |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

となる.

2. 連続関数の例

関数 $f(x)$ がある区間 I に属するすべての値 x で連続であるとき、$f(x)$ は区間 I で連続である，または区間 I で連続関数であるという.

例題　関数 $f(x)=x^2$ は区間 $(-\infty,\ \infty)$ で連続である。すなわち，任意の正の数 ε に対して，適当な正の数 δ を決めると

$$|x-a|<\delta \text{ であるすべての } x \text{ に対して } |x^2-a^2|<\varepsilon \qquad (a \text{は任意の実数})$$

となる.

これから，証明を行うための準備段階での計算を紹介をしたのち，【証明１】，【証明 2】，【証明 3】として 3 通りの方法で証明を行う [2)].

また予め補足として，証明の中で重要な役割を演じる三角不等式について述べておく.

三角不等式

2 つの実数 $\alpha,\ \beta$ に対して，次の不等式

$$|\alpha+\beta| \leqq |\alpha|+|\beta|$$

が成り立つ.

さて，以下のように進めることとする.

【証明 1 の準備】

まず，a を任意の実数としておく．さらに，$y=x-a$ すなわち $x=y+a$ とおけば

$$x^2-a^2=(y+a)^2-a^2=y^2+2ay=(x-a)^2+2a(x-a)$$

が成り立つ。そこで，三角不等式を用いると

$$|x^2-a^2|=|(x-a)^2+2a(x-a)|\leqq|(x-a)^2|+|2a(x-a)|=|x-a|^2+2|a||x-a|$$

となるので，$|x-a|<\delta$ ならば $|x^2-a^2|<\delta^2+2|a|\delta$ が成り立つ.

すると，$\delta^2+2|a|\delta=\varepsilon \quad (\varepsilon>0)$ となればよいから，これを δ について解くと，$\delta^2+2|a|\delta-\varepsilon=0$ より

$$\delta=-|a|\pm\sqrt{|a|^2+\varepsilon}$$

なので，$\delta>0$ より $\delta=-|a|+\sqrt{|a|^2+\varepsilon}$ とすればよい。

【証明 1】

a を任意の実数とする。任意の正の数 ε に対して，$\delta=-|a|+\sqrt{|a|^2+\varepsilon}>0$ と決めると

$$|x-a|<-|a|+\sqrt{|a|^2+\varepsilon}\,(=\delta)$$

であるすべての x に対して

$$
\begin{aligned}
\left|x^2-a^2\right| &= \left|(x-a)^2+2a(x-a)\right| \\
&\leqq \left|(x-a)^2\right|+\left|2a(x-a)\right| \\
&= \left|x-a\right|^2+2|a||x-a| \\
&< \left(-|a|+\sqrt{|a|^2+\varepsilon}\right)^2+2|a|\left(-|a|+\sqrt{|a|^2+\varepsilon}\right) \\
&= |a|^2-2|a|\sqrt{|a|^2+\varepsilon}+\left(|a|^2+\varepsilon\right)-2|a|^2+2|a|\sqrt{|a|^2+\varepsilon} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

となる。

したがって，関数 $f(x)=x^2$ は，$x=a$ で連続である．

【証明 2 の準備】

aを任意の実数としておく．【証明 1】と同様に三角不等式を用いると

$$\left|x^2-a^2\right|=\left|(x-a)^2+2a(x-a)\right|\leqq\left|(x-a)^2\right|+|2a(x-a)|=|x-a|^2+2|a||x-a|$$

となるので，$|x-a|<\delta$ ならば $\left|x^2-a^2\right|<\delta^2+2|a|\delta$ が成り立つ．

ところが，$0<\delta\leqq 1$ となるように δ をとれば，$\delta^2\leqq\delta$ なので

$$\left|x^2-a^2\right|<\delta^2+2|a|\delta\leqq\delta+2|a|\delta=(1+2|a|)\delta$$

となるので，$(1+2|a|)\delta\leqq\varepsilon$ すなわち $\delta\leqq\dfrac{\varepsilon}{1+2|a|}$ とすればよい．

ここで，$\delta=\min\left\{1,\ \dfrac{\varepsilon}{1+2|a|}\right\}$とすれば $\delta\leqq 1$ かつ $\delta\leqq\dfrac{\varepsilon}{1+2|a|}$ が成り立つ．

【証明 2】

aを任意の実数とする。任意の正の数 ε に対して，$\delta=\min\left\{1,\ \dfrac{\varepsilon}{1+2|a|}\right\}$と決めれば

$$|x-a|<\min\left\{1,\ \frac{\varepsilon}{1+2|a|}\right\}(=\delta)$$

であるすべての x に対して，以下の式が成り立つ．

ただし

$$\delta\leqq 1 \text{ かつ } \delta\leqq\frac{\varepsilon}{1+2|a|}$$

となっていることに注意しておく．

$$
\begin{aligned}
\left| x^2 - a^2 \right| &= \left| (x-a)^2 + 2a(x-a) \right| \\
&\leqq \left| (x-a)^2 \right| + \left| 2a(x-a) \right| \\
&= \left| x-a \right|^2 + 2|a||x-a| \\
&< \delta^2 + 2|a|\delta
\end{aligned}
$$

$0<\delta\leqq 1$ より $\delta^2\leqq\delta$ なので

$$
\begin{aligned}
&\leqq \delta + 2|a|\delta \\
&= (1+2|a|)\delta \\
&\leqq (1+2|a|)\times\frac{\varepsilon}{1+2|a|} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

したがって，関数 $f(x)=x^2$ は， $x=a$ で連続である．

【証明 3 の準備】

a を任意の実数としておく．まず以下の式変形を試みることにするが， $|x-a|<\delta$ ならば

$$\left| x^2 - a^2 \right| = \left| (x+a)(x-a) \right| = |x+a||x-a| \leqq (|x|+|a|)|x-a| < (|x|+|a|)\delta$$

となる。さて， $|x|+|a|$ についてさらに考察する。三角不等式を用いると

$$|x| = |(x-a)+a| \leqq |x-a| + |a| < \delta + |a|$$

なので

$$|x|+|a| < \delta + 2|a|$$

となっていることがわかる。よって $\delta\leqq 1$ となるようにすれば

$$\left| x^2 - a^2 \right| < (|x|+|a|)\delta < (\delta+2|a|)\delta \leqq (1+2|a|)\delta$$

であるから， $(1+2|a|)\delta\leqq\varepsilon$ すなわち $\delta\leqq\dfrac{\varepsilon}{1+2|a|}$ とすればよい．

以上より， $\delta=\min\left\{1,\ \dfrac{\varepsilon}{1+2|a|}\right\}$ とおくことにする。

【証明 3】

a を任意の実数とする。任意の正の数 ε に対して， $\delta=\min\left\{1,\ \dfrac{\varepsilon}{1+2|a|}\right\}$ と決めれば

$$|x-a| < \min\left\{1,\ \frac{\varepsilon}{1+2|a|}\right\} (=\delta)$$

であるすべての x に対して，以下の式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
\left| x^2 - a^2 \right| &= \left| (x+a)(x-a) \right| \\
&= \left| x+a \right| \left| x-a \right| \\
&\leqq \left(\left| x \right| + \left| a \right| \right) \left| x-a \right| \\
&< \left(\left| x \right| + \left| a \right| \right) \delta \\
&\leqq \left(\delta + 2\left| a \right| \right) \delta \\
&\leqq \left(1 + 2\left| a \right| \right) \delta \\
&\leqq \left(1 + 2\left| a \right| \right) \times \frac{\varepsilon}{1+2\left| a \right|} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

したがって，関数 $f(x) = x^2$ は，$x = a$ で連続である.

3. おわりに

直感的な定義ではなく，ε－δ 論法を用いて論理的に厳密に議論することについて，細かい計算も含めて解説したが、ε－δ 論法を用いる必要性については説明がなされていない. そこで関数列の各点収束と一様収束の ε－δ 論法を用いた定義について述べる[3].

一定の順序で並べられた関数 $f_1, f_2, f_3, \cdots\cdots, f_n, \cdots\cdots$ が共通の区間 I で定義されているとき，これを I における関数列といい，$\left\{ f_n \right\}$ で表す.

I の 1 点 x を固定すれば，関数列 $\left\{ f_n \right\}$ に対して数列 $\left\{ f_n(x) \right\}$ が得られるが，I のすべての点に対して極限値

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

が存在するとき, 関数列 $\left\{ f_n \right\}$ は区間 I で f に収束する, または各点収束するといい, $f_n \to f$ と表し, f を $\left\{ f_n \right\}$ の極限関数という.

一般に $f_n \to f$ であっても，収束状態は点によって異なるが，任意に与えられた正の数 ε に対して x に無関係な番号 N が存在し，$n > N$ であるすべての n に対して区間 I で

$$\left| f(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon$$

が成り立つとき，関数列 $\left\{ f_n \right\}$ は区間 I で f に一様収束する，または平等に収束するという.

やはり直感的に, 各点収束と一様収束を区別することはできないといってよいのではないかと思う. したがって，ε－δ 論法を用いて論理的に厳密な議論をすることも必要であると考えられる.

参考文献

1）　石原繁, 浅野重初「理工系入門 微分積分」裳華房，1999
2）　田島一郎「イプシロン－デルタ」共立出版，1978
3）　水野克彦編「基礎課程解析学」学術図書，1966