

大学初年次における数学教材の提案（その18）

～正定値行列～

貴田 研司^{*1}

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.18 ～ Positive-Definite Matrix～

by

Kenshi KIDA^{*1}

(received on May 30, 2018 & accepted on Jul.27, 2018)

あらまし

まず、2次形式とその係数行列である対称行列の符号を定義する。さらに、符号の判定方法として、固有値によるものと、主対角小行列式を用いるものを紹介する。

Abstract

First, we define signums of quadratic forms and symmetric matrices, representing quadratic form. Further, we present methods by means of eigen values, or principal minors as criteria of signums.

キーワード: 符号, 正値対称行列, 正値二次形式, 固有値, 主対角小行列式

Keywords: Signum, Positive-Definite Symmetric Matrix, Positive-Definite Quadratic Form, Eigen Value, Principal Minor

1. はじめに

大学初年次の線形代数において、固有値と固有ベクトルを学ぶ際に、対称行列の直交行列による対角化というものに触れる。以下のようなものである。

実数を成分とする n 次行列で、 ${}^tA = A$ を満たすものを対称行列といい、 ${}^tT = T^{-1}$ を満たすものを直交行列という。これらについて

定理 1.1

対称行列の固有値はすべて実数である。

定理 1.2

対称行列 A は、適当な直交行列 T によって

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{は}, A \text{の固有値})$$

と対角化できる。

本論文では、2次形式と対称行列の符号（正値、半正値、負値、半負値、不定符号）の概念について述べたのち、符号の判定方法とそれを適用した例について紹介する¹⁾²⁾³⁾⁴⁾⁵⁾⁶⁾⁷⁾。

^{*1} 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus,
Associate Professor

2. 2次形式と対称行列

今

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を n 次対称行列,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

を n 次元実ベクトルとするとき, 変数 x_1, x_2, \dots, x_n の 2 次同次式

$$f(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j$$

ただし, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = {}^t\mathbf{v}\mathbf{u}$ で n 次元実ベクトルの標準内積を表す.

のことを, x_1, x_2, \dots, x_n に関する a_{ij} を係数とする 2 次形式といい, A を 2 次形式 $f(\mathbf{x})$ の係数行列という.

$f(\mathbf{x})$ がベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ に対して, 常に $f(\mathbf{x}) > 0$ となるとき, $f(\mathbf{x})$ を正値 2 次形式とよび, A を正値対称行列と呼ぶ. また, 任意のベクトル \mathbf{x} に対して, $f(\mathbf{x}) \geq 0$ となるときには, f および A は半正値であるといわれる.

同様にして, ベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ に対しての $f(\mathbf{x})$ の符号によって次のように定義する.

定義 (符号)

1. f および A が, 正値 $\Leftrightarrow \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ のとき $f(\mathbf{x}) > 0$.
2. f および A が, 半正値 $\Leftrightarrow \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ のとき $f(\mathbf{x}) \geq 0$ であり, 等号が実現する.
3. f および A が, 負値 $\Leftrightarrow \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ のとき $f(\mathbf{x}) < 0$.
4. f および A が, 半負値 $\Leftrightarrow \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ のとき $f(\mathbf{x}) \leq 0$ であり, 等号が実現する.
5. f および A が, 不定符号 $\Leftrightarrow \mathbf{x}$ によって, $f(\mathbf{x})$ は正にも負にもなる.

さて, A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とするとき, 定理 1.2 より, 適当な直交行列 T を用いれば

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

となり, また

$$\mathbf{x} = T\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

とおけば

$$f(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} = {}^t(T\mathbf{y})A(T\mathbf{y}) = {}^t\mathbf{y}({}^tTAT)\mathbf{y} = {}^t\mathbf{y}D\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$$

となるから, f および A が正値であるための必要十分条件は, すべての固有値が正であることである. また, 半正値であるための必要十分条件は, すべての固有値が非負であり, 0 を含むことであることがわかる.

同様にして, 次が成り立つ.

定理 2.1

1. f および A が, 正値 $\Leftrightarrow A$ の固有値はすべて正である.
2. f および A が, 半正値 $\Leftrightarrow A$ の固有値には負がなく, 0 がある.
3. f および A が, 負値 $\Leftrightarrow A$ の固有値はすべて負である.
4. f および A が, 半負値 $\Leftrightarrow A$ の固有値には正がなく, 0 がある.
5. f および A が, 不定符号 $\Leftrightarrow A$ の固有値に正も負もある.

例題 2.1

次の対称行列の符号を調べよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(解答)

それぞれの行列の固有値を求めることにより, 定理 2.1 を利用して符号の判定を行う.

(1) A の固有値を λ とすると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ -3+\lambda & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (3 - \lambda)\{(3 - \lambda)(1 - \lambda) - 2\} \\
 &= (3 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0
 \end{aligned}$$

なので、 $\lambda = 3, 2 \pm \sqrt{3}$ であることがわかるが、すべて正だから定理 2.1 の 1 より A は正値である。

(2) B の固有値を λ とすると

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 & -1 \\ -\lambda & 3-\lambda & -1 & -1 \\ -\lambda & -1 & 3-\lambda & -1 \\ -\lambda & -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= -\lambda(4 - \lambda)^3 = 0
 \end{aligned}$$

なので、 $\lambda = 0, 4$ (重複度 3)であることがわかるが、負がなく 0 があるので、定理 2.1 の 2 より B は半正値である。

(3) C の固有値を λ とすると

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (3 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (3 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (3 - \lambda) \{(-3 - \lambda)(-1 - \lambda) - 8\} \\
 &= (3 - \lambda)(1 - \lambda)(-5 - \lambda) = 0
 \end{aligned}$$

なので、 $\lambda = 1, 3, -5$ であることがわかるが、正も負もあるので定理 2.1 の 5 より C は不定符号である。

(解答終)

また、以下のことも興味深い結果であるので紹介する.

定理 2.2

実数を成分とする n 次行列 A について、正値対称行列であるための必要十分条件は、 $A = {}^tPP$ となるような正則行列 P が存在することである.

(証明)

正則行列 P があって、 $A = {}^tPP$ となっているならば

$${}^tA = ({}^tPP) = {}^tP {}^t({}^tP) = {}^tPP = A$$

であるから、 A は対称行列である.

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = ({}^tPP\mathbf{x}, \mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x} {}^tPP\mathbf{x} = {}^t(P\mathbf{x})P\mathbf{x} = (P\mathbf{x}, P\mathbf{x}) = |P\mathbf{x}|^2 \geq 0$$

であるが、等号が成り立つのは $P\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のとき、かつそのときに限る.

ところが、 P は正則行列であるから、 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ならば $P\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ となるので、 A は正値対称行列である.

逆に、 A が正値対称行列であるならば、定理 1.2 および定理 2.1 より、適当な直交行列 T が存在して

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{ は } A \text{ の固有値で } \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_n > 0)$$

すなわち

$$\begin{aligned} A &= T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} {}^tT \\ &= T \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tT \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} {}^tT$$

とおけば、 P は正則行列であって

$$\begin{aligned}
 {}^tP &= \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \sqrt{\lambda_1} & & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt{\lambda_n} \end{array} \right) {}^tT \right\} \\
 &= {}^t({}^tT) \left\{ \left(\begin{array}{cccc} \sqrt{\lambda_1} & & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt{\lambda_n} \end{array} \right) \right\} \\
 &= T \left(\begin{array}{cccc} \sqrt{\lambda_1} & & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt{\lambda_n} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

であるから, $A = {}^tPP$ が成り立つ.

(証明終)

3. 符号の判定方法

小行列式を使って, 対称行列の正值性の判定をする方法を一つ挙げる. n 次行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

に対して

$$|A_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

を, k 次主対角小行列式(首座行列式)という.

定理3.1

n 次対称行列 A について, 次のようなことが成り立つ.

1. A が正值である. $\Leftrightarrow |A_k| > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$).
2. A が半正值である. $\Leftrightarrow |A_k| \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$)かつ $|A| = 0$.
3. A が負値である. $\Leftrightarrow |A_{2k-1}| < 0, |A_{2k}| > 0$ ($k = 1, 2, \dots$).
4. A が半負値である. $\Leftrightarrow |A_{2k-1}| \leq 0, |A_{2k}| \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots$)かつ $|A| = 0$.

5. A が不定符号である. \Leftrightarrow ① 偶数次の主対角行列式に負のものがある,
 または, ② 奇数次の主対角小行列式に正と負の両方がある.

例題3.1

次の対称行列の符号を調べよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(解答)

すべての主対角小行列式の値を求めて, 定理 3.1 を利用して符号の判定を行う.
 また, 記号も定理 3.1 と同じものを用いる.

(1)

$$\begin{aligned} |A_1| &= 2 > 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 > 0, \\ |A_4| &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 8 & -5 & 0 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 8 & -5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -3 & 8 & -5 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 2 > 0 \end{aligned}$$

なので, $|A_1| > 0, |A_2| > 0, |A_3| > 0, |A_4| > 0$ だから, 定理3.1の1より A は正値である.

(2)

$$|B_1| = -3 < 0, \quad |B_2| = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 > 0, \quad |B_3| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

なので, 定理3.1の4より B は半負値である.

(解答終)

例題3.2

次の2次形式の符号を調べよ.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \quad (a \text{ は定数})$$

(解答)

2次形式 f の係数行列を A とおくと

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

である. 固有値を求めることにする.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & a & a \\ a & 1-\lambda & a \\ a & a & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+1-\lambda & a & a \\ 2a+1-\lambda & 1-\lambda & a \\ 2a+1-\lambda & a & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2a+1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 1-\lambda & a \\ 1 & a & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2a + 1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & -a + 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -a + 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2a + 1 - \lambda)(-a + 1 - \lambda)^2 = 0$$

なので、 $\lambda = 2a + 1, -a + 1$ (2重解) である。したがって

- (1) $a < -\frac{1}{2}$ のとき、 $2a + 1 < 0, 1 - a > 0$ なので定理2.1の5 より、 f は不定符号である。
- (2) $a = -\frac{1}{2}$ のとき、 $2a + 1 = 0, 1 - a = \frac{3}{2} > 0$ なので定理2.1の2 より、 f は半正値である。
- (3) $-\frac{1}{2} < a < 1$ のとき、 $2a + 1 > 0, 1 - a > 0$ なので定理2.1の1 より、 f は正値である。
- (4) $a = 1$ のとき、 $2a + 1 = 3 > 0, 1 - a = 0$ なので定理2.1の2 より、 f は半正値である。
- (5) $1 < a$ のとき、 $2a + 1 > 0, 1 - a < 0$ なので定理2.1の5 より、 f は不定符号である。

であることから

- ・ $-\frac{1}{2} < a < 1$ のとき、 f は正値である。
- ・ $a = -\frac{1}{2}, 1$ のとき、 f は半正値である。
- ・ $a < -\frac{1}{2}, 1 < a$ のとき、 f は不定符号である。

が得られる。

(解答終)

(別解)

2次形式 f の係数行列を A とおくと

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

であるが、定理3.1の記号をそのまま使うことにすると、それぞれの主対角小行列式は

$$\begin{aligned} |A_1| &= 1, |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 = (1 + a)(1 - a), \\ |A_3| &= \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a + 1 & a & a \\ 2a + 1 & 1 & a \\ 2a + 1 & a & 1 \end{vmatrix} = (2a + 1) \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2a + 1) \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 - a & 0 \\ 0 & 0 & 1 - a \end{vmatrix} = (2a + 1)(1 - a)^2 \end{aligned}$$

となる。したがって

- (1) $a < -1$ のとき、 $|A_1| > 0, |A_2| < 0, |A_3| < 0$ なので、定理3.1の5.①または②より、 f は不定符号である。
- (2) $a = -1$ のとき、 $|A_1| > 0, |A_2| = 0, |A_3| < 0$ なので、定理3.1の5.②より、 f は不定符号である。
- (3) $-1 < a < -\frac{1}{2}$ のとき、 $|A_1| > 0, |A_2| > 0, |A_3| < 0$ なので、定理3.1の5.②より、 f は不定符号である。
- (4) $a = -\frac{1}{2}$ のとき、 $|A_1| = 1 > 0, |A_2| = \frac{3}{4} > 0, |A_3| = 0$ なので、定理3.1の2より、 f は半正値である。
- (5) $-\frac{1}{2} < a < 1$ のとき、 $|A_1| > 0, |A_2| > 0, |A_3| > 0$ なので、定理3.1の1より、 f は正値である。

(6) $a = 1$ のとき, $|A_1| = 1 > 0$, $|A_2| = 0$, $|A_3| = 0$ なので, 定理3.1の2より, f は半正値である.

(7) $1 < a$ のとき, $|A_1| > 0$, $|A_2| < 0$, $|A_3| > 0$ なので, 定理3.1の5.①より, f は不定符号である.

であることから

- ・ $-\frac{1}{2} < a < 1$ のとき, f は正値である.
- ・ $a = -\frac{1}{2}, 1$ のとき, f は半正値である.
- ・ $a < -\frac{1}{2}, 1 < a$ のとき, f は不定符号である.

が得られる.

(解答終)

参考文献

- 1) 小寺平治「明解演習 線形代数」共立出版, 1982
- 2) 入江昭二「線形数学II」共立出版, 1969
- 3) 数学・基礎教育研究会編著「線形代数学20講」朝倉書店, 2003
- 4) 佐藤正次, 永井治共編「基礎課程 線型代数学」学術図書, 1976
- 5) 佐武一郎「線型代数学」裳華房, 1974
- 6) 齋藤正彦「線型代数入門」東京大学出版会, 1966
- 7) 鈴木七緒, 安岡善則, 黒崎千代子, 志村利雄「詳解 線形代数演習」共立出版, 1982