東海大学紀要情報通信学部
Vol.9,No.1,2016,pp.24-30

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その２）～微分方程式と行列の指数関数～

貴田　研司[*1]

Suggestion about Mathematical Material for Freshman Education Vol.2 ~Differential Equations and Exponential Functions of Matrices~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on May 19, 2016　&　accepted on Jun. 30, 2016)

あらまし

大学初年次の数学科目において，微分積分と線形代数が別々に講じられる．ところがこの2科目の共通領域について触れる機会が少なすぎるのが現状である．そこで応用例として，連立微分方程式を行列の指数関数を用いて解く方法についての詳しい解説をしてみたい．

Abstract

Differential and integral calculus and linear algebra are lectured for freshman individually. Methods of solution of simultaneous differential equations by exponential functions of matrices are presented in this paper.

キーワード： 微分方程式、行列の指数関数、マクローリン展開

Keywords: Differential Equations, Exponential Functions of Matrices, Maclaurin Expansion

1．はじめに

大学初年次おいて学ぶ科目に「微分積分」[1)]と「線形代数」[2)]がある. 個別にそれぞれの事項について学習することが重要であることはもちろんである. しかし, この 2 科目の垣根を越えた各事項のつながりや応用例に触れることは少ない. そこで一つの例として, 行列の指数関数を用いて, 連立微分方程式を解く方法の紹介を数学教材として提案したいと思う.

さて, 変数分離形微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = ax \qquad (a\text{は定数})$$

の解は， $x(t) = be^{at}$ $\left(b\text{は任意定数}\right)$ であり, さらに, 初期条件 $x(0) = c$ の下で解くと特殊解

$$x(t) = ce^{at}$$

が得られる. ところが, 連立微分方程式を線形代数で学ぶ行列の形式で表現すると, 同じような形で解が得られる. その際に微分積分で学ぶ次のマクローリン展開

(1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n\,!} + \cdots \quad \left(-\infty < x < +\infty\right)$

*1 高輪教養教育センター　准教授
Liberal Arts Education Center，Takanawa Campus,
Associate Professor

(2) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$

(3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$

が重要な役割を演じる.

2. 行列の指数関数

まず, 行列の整級数を定義することとする. 変数 t に関する整級数

$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n + \cdots$$

の各 t を n 次行列 A で置き換えることによって得られる行列

$$c_0 E + c_1 A + c_2 A^2 + \cdots + c_n A^n + \cdots$$

のことを, 行列 A の整級数という. この収束と発散については次の結果が知られている [3)4)].

定理　元の変数 t に関する整級数の収束半径を ρ とする. 行列 A の整級数は, A のすべての固有値の絶対値が ρ より小さければ収束する. また, 一つでも固有値の絶対値が ρ を越えれば発散する.

そこで, 指数関数 e^t のマクローリン展開の収束半径が無限大であり

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n\,!} + \cdots \quad (-\infty < t < +\infty)$$

であることを利用して, n 次行列 A の指数関数 $e^A (= \exp A)$ を次の整級数

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^n}{n\,!} + \cdots \quad (E\text{は}n\text{次単位行列})$$

で定義する. これは上記の定理により, 任意の n 次行列 A に対して収束する.

例 [5)]

2 次行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して指数関数 e^{tA} を求めよ.

〔解答〕

まず

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

であるから, これより

$$A^5 = A^9 = A^{13} = \cdots\cdots = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^6 = A^{10} = A^{14} = \cdots\cdots = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^7 = A^{11} = A^{15} = \cdots\cdots = A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^8 = A^{12} = A^{16} = \cdots\cdots = A^4 = E$$

となることがわかる.

これらの結果を用いると, 行列の指数関数の定義から

$$e^{tA} = E + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \frac{t^4A^4}{4!} + \cdots\cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^4}{4!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t^5}{5!}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^6}{6!}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{t^7}{7!}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots \\ -\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots\right) & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

が得られる.

上では, 次のマクローリン展開

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots + (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \cdots \quad (-\infty < t < +\infty)$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots \quad (-\infty < t < +\infty)$$

を用いた.〔解答終〕

さらに, 次の性質が成り立つことが知られている [3)6)7)].

① 任意の n 次正則行列 P に対して

$$\exp P^{-1}AP = P^{-1}(\exp A)P$$

② $\det(\exp A) = e^{trA}$

③ 実数値行列値関数 $\exp tA$ は解析関数であり, 項別に微分すると, $\frac{d}{dt}(\exp tA) = A\exp tA$ が成り立つ.

④ ${}^t(\exp A) = \exp {}^tA$

⑤　$AB=BA$ ならば $\exp(A+B)=\exp A\cdot\exp B$

⑥　$\exp A$ は正則行列で，$(\exp A)^{-1}=\exp(-A)$

3. 定数係数連立常微分方程式

実変数 t の n 個の未知関数 $x_1(t),\ x_2(t),\cdots,x_n(t)$ についての, 定数係数 1 階線形連立常微分方程式

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}x_1(t)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+\cdots+a_{1n}x_n(t)\\ \dfrac{d}{dt}x_2(t)=a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+\cdots+a_{2n}x_n(t)\\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{d}{dt}x_n(t)=a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+\cdots+a_{nn}x_n(t)\end{cases}$$

が行列を用いることにより, 前述の変数分離形微分方程式 $\dfrac{dx}{dt}=ax$ の形に書くことができることを示し, さらに類似した手法を用いて解けることについて解説したい. ここで

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{pmatrix}$$

とおけば

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)=A\mathbf{x}(t)\cdots(*)$$

と表すことができることがわかる.

そして, 行列の指数関数を利用することにより解くことができるのだが, 以下の定理について紹介する.

定理 [6) 7) 8)]　定数係数 1 階線形連立常微分方程式 $(*)$ について, 初期条件 $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\\\vdots\\x_n(0)\end{pmatrix}$ の下で解くと, その解は

$$\mathbf{x}(t)=\exp tA\cdot\mathbf{x}(0)$$

である.

〔証明〕　まず前述の③により, 関数 $\exp tA$ を項別に微分すると, $\dfrac{d}{dt}(\exp tA)=A\exp tA$ が成り立つ. 今, $\exp tA$ の各列ベクトルを $\mathbf{y}_\mathbf{i}(t)$　$(i=1,, 2,\cdots,n)$ とおくことにすれば, $\exp tA=(\mathbf{y}_1(t),\mathbf{y}_2(t),\cdots,\mathbf{y}_n(t))$ であり

$$\frac{d}{dt}(\exp tA)=\left(\frac{d}{dt}\mathbf{y}_1(t),\frac{d}{dt}\mathbf{y}_2(t),\cdots,\frac{d}{dt}\mathbf{y}_n(t)\right)=(A\mathbf{y}_1(t),A\mathbf{y}_2(t),\cdots,A\mathbf{y}_n(t))=A\exp tA$$

なので, すべての $\mathbf{y_i}(t)$ について $\dfrac{d}{dt}\mathbf{y_i}(t)=A\mathbf{y_i}(t)$ が成り立つので, これらが $(*)$ の一つの解であることがわかる. したがって, 次の一次結合

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t)&=k_1\,\mathbf{y}_1(t)+k_2\,\mathbf{y}_2(t)+\cdots+k_n\,\mathbf{y}_n(t) \qquad (k_1,\,k_2,\,\cdots,\,k_n\ \text{は定数})\\ &=(\ \mathbf{y}_1(t),\mathbf{y}_2(t),\cdots,\mathbf{y}_n(t)\ )\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}\\ &=\exp tA\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

もまた, $(*)$ の解であるが示された.

さらに, 初期条件 $\mathbf{x}(0)=\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\\\vdots\\x_n(0)\end{pmatrix}$ によって係数 $k_1,\,k_2,\,\cdots,\,k_n$ の値を定める. 上の式において $t=0$ とすれば

$$\mathbf{x}(0)=\exp\mathbf{0}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\mathbf{E}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\\\vdots\\x_n(0)\end{pmatrix}$$

の下での解は $\exp tA\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\\\vdots\\x_n(0)\end{pmatrix}=\exp tA\cdot\mathbf{x}(0)$ である. 〔証明終〕

次に, 未知関数が 2 個の場合の例を挙げておく.

例題 [5] 次の未知関数 $x_1(t),\ x_2(t)$ に関する連立常微分方程式を, 初期条件 $x_1(0)=1,\ x_2(0)=0$ の下で解く.

$$(*)\begin{cases}\dfrac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t)\\[2mm] \dfrac{dx_2(t)}{dt}=-x_1(t)\end{cases}$$

〔解答〕 まず,連立常微分方程式$(*)$とその初期条件について,行列を用いて表示すると

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であるから,ここで

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくことにすれば

$$\frac{d\,\mathbf{x}(t)}{dt} = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表すことができる.

したがって,求める解は

$$\mathbf{x}(t) = \exp tA \cdot \mathbf{x}(0)$$

で与えられるが,上述の**例**での行列の指数関数$\exp tA$の計算結果を用いると

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

すなわち

$$x_1(t) = \cos t, \quad x_2(t) = -\sin t$$

が得られる.〔解答終〕

4. おわりに

微分方程式 $\dfrac{d}{dt}x(t) = ax(t)$ の解は, $x(t) = e^{at}x(0)$ であり,連立微分方程式 $\dfrac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t)$ の解は, $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0)$ であるという,美しい対応が得られたことになる[7)8)].

行列の指数関数は,例えば対角行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$ に対して, $\exp tA = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\alpha_n} \end{pmatrix}$ と求めることができる.しかし,一般には簡単に計算できるとは限らないことにも注意が必要である.

参考文献

1)　石原繁・浅野重初「理工系入門微分積分」裳華房, 1999
2)　柴田正憲・貴田研司「情報科学のための線形代数」コロナ社, 2009
3)　齋藤正彦「線型代数入門」東京大学出版会, 1966
4)　横山雄一「線形代数」昭晃堂, 1975
5)　渡辺昌昭「わかりやすい微分方程式」共立出版, 1997
6)　三宅敏恒「微分方程式―やさしい解き方―」培風館, 2007
7)　松坂和夫「線型代数入門」岩波書店, 1980
8)　韓太舜・伊理正夫「ジョルダン標準形」東京大学出版会, 1982