東海大学紀要情報通信学部
Vol.9,No.2,2016,pp.30-36

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 6）
～有限群の共役類～

貴田 研司[*1]

Suggestion about Mathematical Material for Freshman Education Vol.6
~Conjugacy Classes of Finite Groups~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on Nov. 22, 2016 & accepted on Dec. 21, 2016)

あらまし
大学初年次で学ぶ群論から共役の概念を取り上げる．まずは，具体的な共役類分解の例を挙げることとするが，その後に共役類と正規部分群の関連について述べることとする．

Abstract
The concepts of conjugacy classes of finite groups in group theory strike freshmen as difficult by reason of high degree of its abstraction. So we give several concrete examples of conjugacy classes of finite groups.

キーワード:共役類，類等式，正規部分群，対称群，2 面体群
Keywords: *Conjugacy Class, Class Formula, Normal Subgroup, Symmetric Group, Dihedral Group*

1. はじめに

群 G の 2 つの元 a, b に対して，$t^{-1}at = b$ となるような $t \in G$ が存在するときこれら 2 つの元 a, b は共役であるといい，$a \sim b$ と表す．さらに，お互いに共役な元からなる部分集合のことを G の共役類と呼ぶ．
有限群の異なる共役類を $C_1, C_2, \cdots, C_r$ とすると

$$G = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r, \quad C_i \cap C_j = \phi \ (i \neq j)$$

となっているので

$$|G| = |C_1| + |C_2| + \cdots + |C_r|$$

が得られる．これを G の類等式と呼ぶ．
また，群 G の部分群 N について，任意の $a \in G$ に対して

$$a^{-1}Na = N$$

が成り立つとき，N は G の正規部分群であるといい，$N \triangleleft G$ または $G \triangleright N$ と表す．
さて，群における元の共役と同様に，部分群の共役を定義する．群 G の 2 つの部分群 H, H' は

$$H' = a^{-1}Ha$$

を満たすような $a \in G$ があるとき，共役な部分群といわれる．
正規部分群はいくつかの共役類の和集合であり，いくつかの共役類の和集合が部分群をなすとき，それは正規部分群である．
本論文では，対称群および 2 面体群についての共役類分解を具体的に与え，類等式，正規部分群などについても考察して行く [1)2)3)]．

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center,Takanawa Campus,
Associate Professor

2. 対称群の共役類分解

まず最初に，共役の定義にしたがって群の共役類分解を求めてみる．

例 1　3 次対称群 $S_3 = \{e = \sigma_1, (1, 2) = \sigma_2, (1, 3) = \sigma_3, (2, 3) = \sigma_4, (1, 2, 3) = \sigma_5, (1, 3, 2) = \sigma_6\}$について考えてみる．

まず，$\sigma_1^{-1} = e,\ \sigma_2^{-1} = (1, 2),\ \sigma_3^{-1} = (1, 3),\ \sigma_4^{-1} = (2, 3),\ \sigma_5^{-1} = (1, 3, 2),\ \sigma_6^{-1} = (1, 2, 3)$である．

すると

$$
\begin{aligned}
&a^{-1}\sigma_1 a = a^{-1}ea = e, \qquad (a \in G),\\
&\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1 = e(1, 2)e = (1, 2),\ \sigma_2^{-1}\sigma_2\sigma_2 = (1, 2)(1, 2)(1, 2) = (1, 2),\\
&\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_3 = (1, 3)(1, 2)(1, 3) = (2, 3),\ \sigma_4^{-1}\sigma_2\sigma_4 = (2, 3)(1, 2)(2, 3) = (1, 3),\\
&\sigma_5^{-1}\sigma_2\sigma_5 = (1, 3, 2)(1, 2)(1, 2, 3) = (1, 3),\ \sigma_6^{-1}\sigma_2\sigma_6 = (1, 2, 3)(1, 2)(1, 3, 2) = (2, 3)\\
&\sigma_1^{-1}\sigma_3\sigma_1 = e(1, 3)e = (1, 3),\ \sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_2 = (1, 2)(1, 3)(1, 2) = (2, 3),\\
&\sigma_3^{-1}\sigma_3\sigma_3 = (1, 3)(1, 3)(1, 3) = (1, 3),\ \sigma_4^{-1}\sigma_3\sigma_4 = (2, 3)(1, 3)(2, 3) = (1, 2),\\
&\sigma_5^{-1}\sigma_3\sigma_5 = (1, 3, 2)(1,3)(1, 2, 3) = (2, 3),\ \sigma_6^{-1}\sigma_2\sigma_6 = (1, 2, 3)(1, 3)(1, 3, 2) = (1, 2),\\
&\sigma_1^{-1}\sigma_4\sigma_1 = e(2, 3)e = (2, 3),\ \sigma_2^{-1}\sigma_4\sigma_2 = (1, 2)(2, 3)(1, 2) = (1, 3),\\
&\sigma_3^{-1}\sigma_4\sigma_3 = (1, 3)(2, 3)(1, 3) = (1, 2),\ \sigma_4^{-1}\sigma_4\sigma_4 = (2, 3)(2, 3)(2, 3) = (2, 3),\\
&\sigma_5^{-1}\sigma_4\sigma_5 = (1, 3, 2)(2, 3)(1, 2, 3) = (1, 2),\ \sigma_6^{-1}\sigma_4\sigma_6 = (1, 2, 3)(2, 3)(1, 3, 2) = (1, 3),\\
&\sigma_1^{-1}\sigma_5\sigma_1 = e(1, 2, 3)e = (1, 2, 3),\ \sigma_2^{-1}\sigma_5\sigma_2 = (1, 2)(1, 2, 3)(1, 2) = (1, 3, 2),\\
&\sigma_3^{-1}\sigma_5\sigma_3 = (1, 3)(1, 2, 3)(1, 3) = (1, 3, 2),\ \sigma_4^{-1}\sigma_4\sigma_4 = (2, 3)(1, 2, 3)(2, 3) = (1, 3, 2),\\
&\sigma_5^{-1}\sigma_5\sigma_5 = (1, 3, 2)(1, 2, 3)(1, 2, 3) = (1, 2, 3),\ \sigma_6^{-1}\sigma_5\sigma_6 = (1, 2, 3)(1, 2, 3)(1, 3, 2) = (1, 2, 3),\\
&\sigma_1^{-1}\sigma_6\sigma_1 = e(1, 3, 2)e = (1, 3, 2),\ \sigma_2^{-1}\sigma_6\sigma_2 = (1, 2)(1, 3, 2)(1, 2) = (1, 2, 3),\\
&\sigma_3^{-1}\sigma_6\sigma_3 = (1, 3)(1, 3, 2)(1, 3) = (1, 2, 3),\ \sigma_4^{-1}\sigma_6\sigma_4 = (2, 3)(1, 3, 2)(2, 3) = (1, 2, 3),\\
&\sigma_5^{-1}\sigma_6\sigma_5 = (1, 3, 2)(1, 3, 2)(1, 2, 3) = (1, 3, 2),\ \sigma_6^{-1}\sigma_6\sigma_6 = (1, 2, 3)(1, 3, 2)(1, 3, 2) = (1, 3, 2)
\end{aligned}
$$

となる．

したがって，S_3の共役類は

$$C_1 = \{e\},\ C_2 = \{(1, 2),\ (1, 3),\ (2, 3)\},\ C_3 = \{(1, 2, 3),\ (1, 3, 2)\}$$

となっていることがわかる．

これから類等式は

$$3! = 6 = 1 + 3 + 2$$

である．

さて，n次対称群S_nの共役類分解については以下の結果が知られている．

定理　n次対称群S_nの２つの元$\sigma,\ \rho$がS_nにおいて共役であるための必要十分条件は，σとρの（巡回置換分解の）型が一致することである．

例２　４次対称群S_4の共役類分解は，前述の定理によれば

$$
\begin{aligned}
&C_1=\{e\}\cdots(1,1,1,1)\text{型},\\
&C_2=\{(1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (2,3),\ (2,4),\ (3,4)\}\cdots(2,1,1)\text{型},\\
&C_3=\{(1,2,3),\ (1,3,2),\ (1,2,4),\ (1,4,2),\ (1,3,4),\ (1,4,3),\ (2,3,4),\ (2,4,3)\}\cdots(3,1)\text{型},\\
&C_4=\{(1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\}\cdots(2,2)\text{型},\\
&C_5=\{(1,2,3,4),\ (1,2,4,3),\ (1,3,2,4),\ (1,3,4,2),\ (1,4,2,3),\ (1,4,3,2),\}\cdots(4)\text{型}
\end{aligned}
$$

となる．

　また，これによれば類等式は

$$4!=24=1+6+8+3+6$$

である．

　よって，正規部分群が共役類の和集合からなる部分群であることから，S_4の正規部分群をすべて挙げると，単位群$\{e\}$とS_4自身と以下の２つ

$$
\begin{aligned}
&C_1\cup C_4=\{e,\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3)\}=V,\\
&C_1\cup C_3\cup C_4=\{e,\ (1,2)(3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4)(2,3),\\
&\qquad (1,2,3),\ (1,3,2),\ (1,2,4),\ (1,4,2),\ (1,3,4),\ (1,4,3),\ (2,3,4),\ (2,4,3)\}=A_4,
\end{aligned}
$$

であることがわかる．

３．２面体群の共役類分解

この章ではn次の２面体群

$$
\begin{aligned}
D_n&=\left\langle \sigma,\ \tau \,|\, \sigma^n=1,\ \tau^2=1,\ \tau^{-1}\sigma\tau=\sigma^{-1}\right\rangle\\
&=\left\{1,\ \sigma,\ \sigma^2,\ \cdots,\ \sigma^{n-1},\ \tau,\ \sigma\tau,\ \sigma^2\tau,\ \cdots,\ \sigma^{n-1}\tau\right\}
\end{aligned}
$$

の共役類分解について述べるが，次の結果が知られている．

定理　n次の２面体群$D_n=\left\{1,\ \sigma,\ \sigma^2,\ \cdots,\ \sigma^{n-1},\ \tau,\ \sigma\tau,\ \sigma^2\tau,\ \cdots,\ \sigma^{n-1}\tau\right\}$の共役分解は次のようになる．

　nが偶数の場合は

$$
\{1\},\ \{\sigma,\sigma^{n-1}\},\ \{\sigma^2,\sigma^{n-2}\},\ \cdots,\left\{\sigma^{\frac{n}{2}-1},\sigma^{\frac{n}{2}+1}\right\},\ \left\{\sigma^{\frac{n}{2}}\right\},
$$

$$
\{\tau,\ \sigma^2\tau,\ \cdots,\ \sigma^{n-2}\tau\},\ \{\sigma\tau,\ \sigma^3\tau,\ \cdots,\ \sigma^{n-1}\tau\}
$$

であり， n が奇数の場合は

$$\{1\},\ \{\sigma,\ \sigma^{n-1}\},\ \{\sigma^2,\ \sigma^{n-2}\},\ \cdots,\left\{\sigma^{\frac{n-1}{2}},\ \sigma^{\frac{n+1}{2}}\right\},$$
$$\{\tau,\ \sigma^2\tau,\ \cdots,\ \sigma^{n-1}\tau\},\ \{\sigma\tau,\ \sigma^3\tau,\ \cdots,\ \sigma^{n-2}\tau\}$$

となる.

【証明】　まず，群 D_n の生成元 $\sigma,\ \tau$ の基本関係 $\sigma^n=1,\ \tau^2=1,\ \tau^{-1}\sigma\tau=\sigma^{-1}$ により

$$\tau^{-1}\sigma^k\tau=\sigma^{-k},\qquad (k=0,1,2,\cdots,n-1)$$

であるから

$$\tau\sigma^{-k}\tau=\sigma^k,$$
$$\tau\sigma^k=\sigma^{-k}\tau,\qquad \tau\sigma^{-k}=\sigma^k\tau$$

が成り立つ.

すると

$$a^{-1}1a=1,\qquad (a\in D_n),$$
$$(\sigma^k)^{-1}\sigma\sigma^k=\sigma,$$
$$(\sigma^k)^{-1}\sigma^2\sigma^k=\sigma^2,$$
$$(\sigma^k)^{-1}\sigma^3\sigma^k=\sigma^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(\sigma^k)^{-1}\sigma^{n-2}\sigma^k=\sigma^{n-2},$$
$$(\sigma^k)^{-1}\sigma^{n-1}\sigma^k=\sigma^{n-1},$$

$$(\sigma^k\tau)^{-1}\sigma\sigma^k\tau=\tau\sigma^{-k}\sigma\sigma^k\tau=\tau\sigma\tau=\sigma^{-1}=\sigma^{n-1},$$
$$(\sigma^k\tau)^{-1}\sigma^2\sigma^k\tau=\tau\sigma^{-k}\sigma^2\sigma^k\tau=\tau\sigma^2\tau=\sigma^{-2}=\sigma^{n-2},$$
$$(\sigma^k\tau)^{-1}\sigma^3\sigma^k\tau=\tau\sigma^{-k}\sigma^3\sigma^k\tau=\tau\sigma^3\tau=\sigma^{-3}=\sigma^{n-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(\sigma^k\tau)^{-1}\sigma^{n-2}\sigma^k\tau=\tau\sigma^{-k}\sigma^{n-2}\sigma^k\tau=\tau\sigma^{n-2}\tau=\sigma^{-(n-2)}=\sigma^2,$$
$$(\sigma^k\tau)^{-1}\sigma^{n-1}\sigma^k\tau=\tau\sigma^{-k}\sigma^{n-1}\sigma^k\tau=\tau\sigma^{n-1}\tau=\sigma^{-(n-1)}=\sigma,$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n-2,n-1)$$

となっていることから

$$\sigma^r\sim\sigma^{n-r}\qquad (r=1,2,\cdots,n-2,n-1)$$

が成り立つことがわかり，さらに

$$\left(\sigma^k\right)^{-1}\tau\sigma^k=\sigma^{-k}\tau\sigma^k=\sigma^{-k}\sigma^{-k}\tau=\sigma^{-2k}\tau$$
$$\left(\sigma^k\right)^{-1}\sigma\tau\sigma^k=\sigma^{-k}\sigma\tau\sigma^k=\sigma^{-k+1}\sigma^{-k}\tau=\sigma^{1-2k}\tau,$$
$$\left(\sigma^k\right)^{-1}\sigma^2\tau\sigma^k=\sigma^{-k}\sigma^2\tau\sigma^k=\sigma^{-k+2}\sigma^{-k}\tau=\sigma^{2-2k}\tau,$$
$$\left(\sigma^k\right)^{-1}\sigma^3\tau\sigma^k=\sigma^{-k}\sigma^3\tau\sigma^k=\sigma^{-k+3}\sigma^{-k}\tau=\sigma^{3-2k}\tau,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\sigma^k\right)^{-1}\sigma^{n-2}\tau\sigma^k=\sigma^{-k}\sigma^{n-2}\tau\sigma^k=\sigma^{n-k-2}\sigma^{-k}\tau=\sigma^{(n-2)-2k}\tau,$$
$$\left(\sigma^k\right)^{-1}\sigma^{n-1}\tau\sigma^k=\sigma^{-k}\sigma^{n-1}\tau\sigma^k=\sigma^{n-k-1}\sigma^{-k}\tau=\sigma^{(n-1)-2k}\tau,$$

$$\left(\sigma^k\tau\right)^{-1}\tau\sigma^k\tau=\tau\sigma^{-k}\tau\sigma^k\tau=\sigma^k\tau\tau\sigma^k\tau=\sigma^{2k}\tau,$$
$$\left(\sigma^k\tau\right)^{-1}\sigma\tau\sigma^k\tau=\tau\sigma^{-k}\sigma\tau\sigma^k\tau=\tau\sigma^{-k+1}\tau\sigma^k\tau=\sigma^{k-1}\tau\tau\sigma^k\tau=\sigma^{2k-1}\tau,$$
$$\left(\sigma^k\tau\right)^{-1}\sigma^2\tau\sigma^k\tau=\tau\sigma^{-k}\sigma^2\tau\sigma^k\tau=\tau\sigma^{-k+2}\tau\sigma^k\tau=\sigma^{k-2}\tau\tau\sigma^k\tau=\sigma^{2k-2}\tau,$$
$$\left(\sigma^k\tau\right)^{-1}\sigma^3\tau\sigma^k\tau=\tau\sigma^{-k}\sigma^3\tau\sigma^k\tau=\tau\sigma^{-k+3}\tau\sigma^k\tau=\sigma^{k-3}\tau\tau\sigma^k\tau=\sigma^{2k-3}\tau,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\sigma^k\tau\right)^{-1}\sigma^{n-2}\tau\sigma^k\tau=\tau\sigma^{-k}\sigma^{n-2}\tau\sigma^k\tau=\tau\sigma^{n-k-2}\tau\sigma^k\tau=\sigma^{-n+k+2}\tau\tau\sigma^k\tau=\sigma^{2k-(n-2)}\tau,$$
$$\left(\sigma^k\tau\right)^{-1}\sigma^{n-1}\tau\sigma^k\tau=\tau\sigma^{-k}\sigma^{n-1}\tau\sigma^k\tau=\tau\sigma^{n-k-1}\tau\sigma^k\tau=\sigma^{-n+k+1}\tau\tau\sigma^k\tau=\sigma^{2k-(n-1)}\tau$$

$$\left(k=0,1,2,\cdots,n-2,\ n-1\right)$$

であることから

$$\sigma^r\tau\sim\sigma^{r+2}\tau\qquad\left(r=0,1,2,\cdots,n-4,n-3\right)$$

となっていることがわかる．

したがって，群 D_n の共役類分解は，n が偶数の場合には

$$\left(\sigma^k\tau\right)^{-1}\sigma^{\frac{n}{2}-1}\sigma^k\tau=\tau\sigma^{-k}\sigma^{\frac{n}{2}-1}\sigma^k\tau=\tau\sigma^{\frac{n}{2}-1}\tau=\sigma^{-\left(\frac{n}{2}-1\right)}=\sigma^{-\frac{n}{2}-1+n}=\sigma^{\frac{n}{2}+1}$$
$$\left(\sigma^k\tau\right)^{-1}\sigma^{\frac{n}{2}}\sigma^k\tau=\tau\sigma^{-k}\sigma^{\frac{n}{2}}\sigma^k\tau=\tau\sigma^{\frac{n}{2}}\tau=\sigma^{-\frac{n}{2}}=\sigma^{\frac{n}{2}},$$
$$\left(\sigma^k\tau\right)^{-1}\sigma^{\frac{n}{2}+1}\sigma^k\tau=\tau\sigma^{-k}\sigma^{\frac{n}{2}+1}\sigma^k\tau=\tau\sigma^{\frac{n}{2}+1}\tau=\sigma^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)}=\sigma^{-\frac{n}{2}-1+n}=\sigma^{\frac{n}{2}-1}$$

$$\left(k=0,1,2,\cdots,n-2,n-1\right)$$

であることにも注意して

$$\{1\},\ \{\sigma, \sigma^{n-1}\},\ \{\sigma^2, \sigma^{n-2}\},\ \cdots, \left\{\sigma^{\frac{n}{2}-1}, \sigma^{\frac{n}{2}+1}\right\},\ \left\{\sigma^{\frac{n}{2}}\right\},$$
$$\{\tau,\ \sigma^2\tau,\ \cdots,\ \sigma^{n-2}\tau\},\ \{\sigma\tau,\ \sigma^3\tau,\ \cdots,\ \sigma^{n-1}\tau\}$$

であり，nが奇数の場合には

$$(\sigma^k\tau)^{-1}\sigma^{\frac{n-1}{2}}\sigma^k\tau = \tau\sigma^{-k}\sigma^{\frac{n-1}{2}}\sigma^k\tau = \tau\sigma^{\frac{n-1}{2}}\tau = \sigma^{-\frac{n-1}{2}} = \sigma^{-\frac{n-1}{2}+n} = \sigma^{\frac{n+1}{2}},$$
$$(\sigma^k\tau)^{-1}\sigma^{\frac{n+1}{2}}\sigma^k\tau = \tau\sigma^{-k}\sigma^{\frac{n+1}{2}}\sigma^k\tau = \tau\sigma^{\frac{n+1}{2}}\tau = \sigma^{-\frac{n+1}{2}} = \sigma^{-\frac{n+1}{2}+n} = \sigma^{\frac{n-1}{2}}$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots, n-2, n-1)$$

であることにも注意して

$$\{1\},\ \{\sigma, \sigma^{n-1}\},\ \{\sigma^2, \sigma^{n-2}\},\ \cdots, \left\{\sigma^{\frac{n-1}{2}}, \sigma^{\frac{n+1}{2}}\right\},$$
$$\{\tau,\ \sigma^2\tau,\ \cdots,\ \sigma^{n-1}\tau\},\ \{\sigma\tau,\ \sigma^3\tau,\ \cdots,\ \sigma^{n-2}\tau\}$$

となっていることが示される．

【証明終】

すると，前述の定理より以下のことがわかる．

例 3　8 次の 2 面体群

$$D_8 = \{1,\ \sigma,\ \sigma^2,\ \sigma^3,\ \sigma^4,\ \sigma^5,\ \sigma^6,\ \sigma^7,\ \tau,\ \sigma\tau,\ \sigma^2\tau,\ \sigma^3\tau,\ \sigma^4\tau,\ \sigma^5\tau,\ \sigma^6\tau,\ \sigma^7\tau\}$$

の共役類分解は

$$\{1\},\ \{\sigma, \sigma^7\},\ \{\sigma^2, \sigma^6\},\ \{\sigma^3, \sigma^5\},\ \{\sigma^4\},$$
$$\{\tau,\ \sigma^2\tau,\ \sigma^4\tau,\ \sigma^6\tau\},\ \{\sigma\tau,\ \sigma^3\tau,\ \sigma^5\tau,\ \sigma^7\tau\}$$

となっていることがわかる．

また，これによれば類等式は

$$16 = 1+2+2+2+1+4+4$$

である．

例 4　7 次の 2 面体群

$$D_7 = \{1,\ \sigma,\ \sigma^2,\ \sigma^3,\ \sigma^4,\ \sigma^5,\ \sigma^6,\ \tau,\ \sigma\tau,\ \sigma^2\tau,\ \sigma^3\tau,\ \sigma^4\tau,\ \sigma^5\tau,\ \sigma^6\tau\}$$

の共役類分解は

$$\{1\},\ \{\sigma, \sigma^6\},\ \{\sigma^2, \sigma^5\},\ \{\sigma^3, \sigma^4\},$$
$$\{\tau,\ \sigma^2\tau,\ \sigma^4\tau,\ \sigma^6\tau\},\ \{\sigma\tau,\ \sigma^3\tau,\ \sigma^5\tau\}$$

となっていることがわかる.

また，これによれば類等式は

$$14=1+2+2+2+4+3$$

である.

4. おわりに

この論文では,有限群の共役類分解の応用として,類等式と正規部分群に僅かに触れる程度に留めた.しかし,この周辺の話として，群の軌道，中心，中心化群，正規化群，シローの定理などについても是非取り上げてみたいものである.

参考文献

1） 永尾汎「代数学」朝倉書店，1983
2） 岩永恭雄「代数学の基礎」日本評論社，2002
3） 横井英夫，硲野敏博共著「代数演習」サイエンス社，1989