東海大学紀要情報通信学部
Vol.9,No.1,2016,pp.31-35

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その３）
～絶対収束と条件収束～

貴田 研司[*1]

Suggestion about Mathematical Material for Freshman Education Vol.3
~Absolute Convergence and Conditional Convergence ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on May 19, 2016 & accepted on Jun. 30, 2016)

あらまし

大学初年次の数学科目において, 至る所に無限級数が現れる. 絶対収束と条件収束の概念を是非とも理解したいところである. 条件収束の場合に項を並べる順番を替えることにより, いろいろな値に収束させることができることを, 具体的な例を挙げて説明したい.

Abstract

Infinite series is shown for freshman everywhere. Concepts of absolute convergence and conditional convergence are essential. Appealing concrete examples of conditionally convergent series are presented in this paper.

キーワード: 無限級数、絶対収束、条件収束
Keywords: Infinite Series, Absolute Convergence, Conditional Convergence

1. はじめに

高等学校で, 数列そして無限級数を学んだのち, 大学初年次に学習する「微分積分」をはじめとする解析学などにおいて, 整級数や関数項級数を扱う. しかし, 無限の和においては有限の和では起こらないことも多々ある. この違いを認識していなければ, 無限級数の収束・発散や関数項級数の一様収束, 項別の微分, 項別の積分などについて論じても深い理解は得られない. そこで, 条件収束する級数を並べ替えることにより, いろいろな値に収束させられることを, 例を示すことにより解り易く説明したい.

まず, 級数の和を定義しておく[1). 数列 $\{a_n\}$ から作られる次の無限和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n + \cdots$$

を級数という. また, 初項から第 k 項までの和

$$S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$$

を k 部分和という.

数列 $\{S_n\}$ が収束するとき, 級数 $\sum a_n$ が収束するといい, 極限値 $\lim\limits_{k\to\infty} S_k$ を級数の和という. すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty}\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_k\right)$$

と表す.

*1 高輪教養教育センター　准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus, Associate Professor

2. 級数の例

まず次の級数

$$1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\cdots$$

汎調和級数と呼ばれる[1)2)]. これは, $\alpha>1$のとき収束し, $0<\alpha\leqq 1$のとき発散することが知られている.

特に, $n=1$の場合は

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

と呼ばれるが, これが発散することを示す[3)]. $k=2^{n}\quad(n\geqq 2)$とすれば, $2^{m-1}+2^{m-1}=2^{m}$に注意して

$$\begin{aligned}
S_k &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-2}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n}}\right)\\
&> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\left(\frac{1}{2^{n}}+\cdots+\frac{1}{2^{n}}\right)\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{8}\times 4+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\times 2^{n-2}+\frac{1}{2^{n}}\times 2^{n-1}\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\
&= 1+\frac{1}{2}n
\end{aligned}$$

となるので, $\lim_{n\to\infty} S_k=\infty$だから発散することがわかる.

ところが

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)=C$$

は, 存在して Euler の定数という. Cの値は, $0.5772156\cdots$である[4)].

次に, 正負の項が交互に入ってくる級数を, 交項級数というが, 収束と発散については次の定理が成り立つ[1)].

定理(Leibniz)　数列$\{a_n\}$が単調に 0 に収束するならば, 次の級数

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}a_n+\cdots$$

は収束する[1)2)].

例えば

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

は, 収束する. さらにその和は$\log 2$であることが知られている.

3. 条件収束と絶対収束

級数 $\sum a_n$ は，$\sum|a_n|$ が収束するとき絶対収束するといわれる．級数は，絶対収束すれば収束する．また次の定理も知られている [1)2)]．

定理(Dirichlet)　絶対収束級数の項の順番を並べ替えて得られる級数の和は，元の級数の和に一致する．すなわち，絶対収束級数の和は項の順序に関係しない．

さらに，級数が収束しても絶対収束しないとき，条件収束するという．これについて次の定理が成り立つ．

定理(Riemann)　条件収束級数から，任意の α　$(-\infty<\alpha<\infty)$ を和とするような並べ替えを作ることができる [1)2)]．

すでに述べたように

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

は，収束する（和は $\log 2$）のであるが，調和級数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

は，収束しないので条件収束級数である．

これから，項の順序を入れ替えることにより和が変えられることを例によって示す．今

$$a_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1},$$

$$b_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

とおけば，すでに述べたように

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n-\log 2n)=C,$$

$$\lim_{n\to\infty}(2b_n-\log n)=C$$

が成り立つので

$$a_n+b_n=\log 2n+C+o,$$

$$2b_n=\log n+C+o$$

である．ただし，o は $n\to\infty$ のとき 0 に収束する微少数を表す．

よって

$$a_n = \log 2 + \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{2}C + o,$$

$$b_n = \qquad \frac{1}{2}\log n + \frac{1}{2}C + o$$

が成り立つ.

例えば

$$a_{2n} = \log 2 + \frac{1}{2}\log 2n + \frac{1}{2}C + o,$$

$$b_{3n} = \qquad \frac{1}{2}\log 3n + \frac{1}{2}C + o$$

であるから

$$a_{2n} - b_{3n} = \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{2}{3} + o$$

が得られる.

左辺は $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\cdots$ から 2 項, $-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\cdots$ から 3 項ずつ交互に取って作られる級数（$L(2,\ 3)$ と表すことにする）の $(2+3)n$ 項までの部分和である. そして

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{2n} - b_{3n}\right) = \log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{2}{3}$$

が成り立つ. さて, $L(2,\ 3)$ において, $(2+3)n$ 項から $(2+3)(n+1)$ までの和について

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3(n+1)} &< \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3(n+1)} \\
&< \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n} \\
&= \frac{2+3}{2n}
\end{aligned}$$

であるから, 級数 $L(2,\ 3)$ は収束して, その和は $\log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{2}{3}$ に等しい.

同様にして, 一般に級数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

において, 正の項, 負の項を順に p 項, q 項ずつ交互に取った級数は $\log 2 + \frac{1}{2}\log\frac{p}{q}$ に収束することが示される[4].

4. おわりに

無限級数の不思議さや怖さといったものを, 少しでも実感するために上記のような解説を試みたのであるが, 次のような簡潔な説明だけでもよいかと思うので, 以下に紹介をしてみたい[5].

すでに述べたように

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots=\log 2\cdots\cdots①$$

であり, これは条件収束である.

両辺に $\frac{1}{2}$ をかけると

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}\log 2$$

である. この級数に項 0 を一つおきに入れてみるが, 収束性や和については不変であるから

$$0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+0+\frac{1}{10}+0-\frac{1}{12}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}\log 2\cdots\cdots②$$

となる. ①と②を各項ごとに加えると

$$(1+0)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+0\right)+\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+0\right)+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}+0\right)+\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots=\frac{3}{2}\log 2$$

$$1+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+0+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots=\frac{3}{2}\log 2$$

となるから 0 となった項を取り除くと

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots=\frac{3}{2}\log 2$$

である. これは①において, 正の項を 2 項加えては負の項を 1 項加えるという方法で, 項の順番を並べ替えたものになっており, 和は $\log 2$ ではなく, $\frac{3}{2}\log 2$ に変えられていることがわかる.

参考文献

1) 井上純治・勝股脩・林実樹廣共著「級数」共立出版, 1998
2) 水野克彦編「基礎課程 解析学」学術図書, 1966
3) 久保季夫「モノグラフ 数列（３訂版）」科学新興新社, 1989
4) 高木貞治「解析概論（改訂第三版）」岩波書店, 1961
5) 杉浦光夫「解析入門I」東京大学出版会, 1980