東海大学紀要情報通信学部
Vol.10,No.2,2017,pp.33-40

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 12）
～留数定理を利用した逆ラプラス変換の計算～

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.12
~ Calculations of Inverse Laplace Transform by means of Residue Theorem ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on Nov. 28, 2017 & accepted on Jan. 11, 2018)

あらまし

大学初年次で学ぶ応用数学の中の重要な項目として，ラプラス変換とその応用がある．その逆変換の計算方法として部分分数分解を用いるものがある．この論文では，複素関数論で学ぶ留数を用いた逆ラプラス変換の解法について述べ，連立常微分方程式の初期値問題への応用についても紹介する．

Abstract

As important items in applied mathematics studied in the first grade, we give lectures on Laplace transforms and their applications. As a method for calculating inverse Laplace transforms, we sometimes use means of partial fraction decompositions. In this paper, we give an explanation of calculus for inverse Laplace transform by residues. Furthermore, we present an application to initial value problems of systems of ordinary differential equations.

キーワード：逆ラプラス変換，留数定理，連立常微分方程式

Keywords: *Inverse Laplace Transform, Residue Theorem, System of Ordinary Differential Equations*

1. はじめに

大学初年次においてラプラス変換とその逆変換（逆ラプラス変換）について学ぶ．まずは，ラプラス変換と逆ラプラス変換について述べることとする．

定義

$f(t)$ が $(0,\infty)$ で定義され，任意の有限区間で積分可能とする．複素数 $s=\sigma+i\tau$ $(\sigma,\tau$ は実数$)$ に対して

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}f(t)dt \quad (T \text{ は正の定数})$$

のことを $f(t)$のラプラス積分といい，これが収束するとき，$f(t)$に $F(s)$を対応させる写像をラプラス変換という．また，この関数 $F(s)$のことを元の関数 $f(t)$のラプラス変換，または像関数と呼び，$L[f(t)]$ と表す．すなわち

$$F(s)=L[f(t)]=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

である．像関数 $F(s)$に対し，$f(t)$ を原関数という．

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus,
Associate Professor

これに対する逆ラプラス変換の計算方法として, 以下の定理に基づき, ラプラス変換表を用いる手法がある[1].

定義

任意の $\alpha > 0$ に対して $\int_0^\alpha N(t)dt = 0$ が成り立つとき， $N(t)$ を零関数(null function)と呼ぶ.

零関数はもしそれが連続関数なときには，恒等的に 0 の値をとる定数関数である.

定理

(1) $f_1(t), f_2(t)$ がともに積分可能で，各ラプラス積分の収束域内において $L[f_1(t)] = L[f_2(t)]$ ならば $f_1(t) - f_2(t)$ は零関数である.

(2) 与えられた $F(s)$ をラプラス変換としてもつ連続関数はただ 1 つである.

この定理の(2)によって，与えられた $F(s)$ をラプラス変換としてもつ連続な原関数 $f(t)$ は，ラプラス変換表およびラプラス変換の公式を用いて求めることができる.

それを $F(s)$ の逆ラプラス変換といい， $L^{-1}[F(s)] = f(t)$ と書く.

例 [2)3)]

(1) $F(s) = \dfrac{s+8}{(s-1)(s+2)^2}$ を部分分数分解すると

$$F(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2} - 2\cdot\frac{1}{(s+2)^2} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-(-2)} - 2\cdot\frac{1}{\{s-(-2)\}^2}$$

である．そこで，逆ラプラス変換の公式

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at},\ \cdot L^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^2}\right] = te^{at} \qquad (a \text{ は定数})$$

を利用すると

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = e^t - e^{-2t} - 2te^{-2t} = e^t - (1+2t)e^{-2t}$$

が得られる.

(2) $F(s) = \dfrac{s^2+s-1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$ を部分分数分解すると

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{-1}{s+1} + \frac{2s+1}{s^2+2s+2} \\ &= -\frac{1}{s+1} + 2\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} - \frac{1}{(s+1)^2+1^2} \\ &= -\frac{1}{s-(-1)} + 2\cdot\frac{s-(-1)}{\{s-(-1)\}^2+1^2} - \frac{1}{\{s-(-1)\}^2+1^2} \end{aligned}$$

である．そこで，逆ラプラス変換の公式

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at},\quad \cdot L^{-1}\left[\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}\right]=e^{at}\cos\omega t,\quad \cdot L^{-1}\left[\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}\right]=e^{at}\sin\omega t$$

$$(a,\ \omega\ \text{は定数})$$

を利用すると

$$L^{-1}[F(s)]=f(t)=-e^{-t}+2e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t=e^{-t}(-1+2\cos t-\sin t)$$

が得られる．

上述の，部分分数分解を用いた計算方法がよく使われるが，本論文では，留数定理を用いた手法を紹介する[1)2)4)5)]．

2. 留数定理を用いた逆ラプラス変換の計算方法

さらに，逆ラプラス変換の計算方法の一つとして，次のことが知られている．

定理

$f(t)$は範囲$t>0$で定義された連続関数で，$f'(t)$は区分的に連続であるとする．またβを定数として」

$$F(s)=L[f(t)],\quad \mathrm{Re}(s)>\beta$$

とする．さらに，$\mathrm{Re}(s)>\beta$であるようなsに対して

$$\int_0^{\infty}\left|e^{-st}f(t)\right|dt$$

は有限確定であるとする．このときσを定数として

$$f(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-Ti}^{\sigma+Ti}e^{st}F(s)ds \qquad (\sigma>\beta)$$

であり

$$L^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{st}F(s)ds \qquad (\sigma>\beta)$$

と書き表すのが普通である．

今，複素変数sの関数$F(s)$は有限個の極を除いて正則であるとする．また，$F(s)$の極でその実部がσより小さいものを$s_1, s_2, \cdots, s_k$とする．さらに，原点$s=0$を中心とする，半径の十分大きい円$|s|=R$上の点sで，正の定数Mに対して

$$|F(s)|\leqq\frac{M}{R^n} \qquad (n>1)$$

であるとする．このとき

$$\begin{aligned}f(t)&=L^{-1}[F(s)]\\&=\mathrm{Res}\left[e^{st}F(s),\ s_1\right]+\mathrm{Res}\left[e^{st}F(s),\ s_2\right]+\cdots\cdots+\mathrm{Res}\left[e^{st}F(s),\ s_k\right]\end{aligned}$$

が成り立つ．

ただし，複素関数$g(s)$の極aにおける留数を，記号$\mathrm{Res}[g(s),\ a]$で表した．

留数の計算方法について，以下のことが知られている．

定理 [5)]

点 α が $f(z)$ の1位の極であるとき

$$\operatorname{Res}\left[f(z),\, \alpha\right] = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)$$

点 α が $f(z)$ の k 位 $(k \geqq 2)$ の極であるとき

$$\operatorname{Res}\left[f(z),\, \alpha\right] = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to\alpha}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left\{(z-\alpha)^k f(t)\right\}$$

が成り立つ．

3．逆ラプラス変換の計算例とその応用

例題 1 [2)]

ラプラス変換 $F(s) = \dfrac{s+8}{(s-1)(s+2)^2}$ の逆ラプラス変換を求める．

（解答）

まず，$F(s)e^{st} = \dfrac{s+8}{(s-1)(s+2)^2}e^{st}$ の孤立特異点は，$s=1,\ -2$ である．

さて，$s=1,\ -2$ はそれぞれ 1 位，2 位の極であり

$$\lim_{s\to1}(s-1)F(s)e^{st} = \lim_{s\to1}(s-1)\cdot\frac{s+8}{(s-1)(s+2)^2}e^{st} = \lim_{s\to1}\frac{s+8}{(s+2)^2}e^{st} = e^t\ ,$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to-2}\frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}}\left\{(s+2)^2F(s)e^{st}\right\} &= \lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\left\{(s+2)^2\cdot\frac{s+8}{(s-1)(s+2)^2}e^{st}\right\}\\
&= \lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\left(\frac{s+8}{s-1}e^{st}\right)\\
&= \lim_{s\to-2}\left\{\frac{(s-1)-(s+8)}{(s-1)^2}e^{st} + \frac{s+8}{s-1}\times te^{st}\right\}\\
&= -e^{-2t} - 2te^{-2t}\\
&= -(1+2t)e^{-2t}
\end{aligned}$$

であるから

$$\operatorname{Res}\left[F(s)e^{st},\ 1\right] = e^t, \qquad \operatorname{Res}\left[F(s)e^{st},\ -2\right] = -(1+2t)e^{-2t}$$

となることがわかる．

したがって

$$L^{-1}\left[F(s)\right] = \operatorname{Res}\left[F(s)e^{st},\ 1\right] + \operatorname{Res}\left[F(s)e^{st},\ -2\right] = e^t - (1+2t)e^{-2t}$$

である．

【解答終】

例題 2[3)]

次の連立常微分方程式の初期値問題を，ラプラス変換を用いて解こう．

$$\begin{cases} y' + z' + y = e^{-t} \\ y' + 2z' + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

初期条件： $y(0) = -1,\ \ z(0) = 1$

（解答）

関数 $f(t)$ に対して， $L[f(t)] = F(s)$ とすると

$$L[f'(t)] = s\,L[f(t)] - f(0) = s\,F(s) - f(0)$$

が成り立ち，微分法則と呼ばれている．

そこで， $L[y(t)] = Y(s),\ \ L[z(t)] = Z(s)$ とおけば，微分法則より

$$L[y'(t)] = sY(s) - y(0),\ \ L[z'(t)] = sZ(s) - z(0)$$

が成り立つ．

連立微分方程式の各式の両辺をラプラス変換すると

$$\begin{cases} \{sY(s) - y(0)\} + \{sZ(s) - z(0)\} + Y = \dfrac{1}{s+1} \\ \{sY(s) - y(0)\} + 2\{sZ(s) - z(0)\} + 2Y(s) + 2Z(s) = 0 \end{cases}$$

となるが， 初期条件： $y(0) = -1,\ \ z(0) = 1$ を代入すると

$$\begin{cases} \{sY(s) + 1\} + \{sZ(s) - 1\} + Y(s) = \dfrac{1}{s+1} \\ \{sY(s) + 1\} + 2\{sZ(s) - 1\} + 2Y(s) + 2Z(s) = 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} (s+1)Y(S) + sZ(s) = \dfrac{1}{s+1} \\ (s+2)Y(s) + 2(s+1)Z(s) = 1 \end{cases}$$

となる．

この連立方程式を，クラーメルの公式を用いて， $Y(s),\ \ Z(s)$ について解くことにすると

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{s+1} & s \\ 1 & 2(s+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & s \\ s+2 & 2(s+1) \end{vmatrix}} = \frac{-s+2}{s^2+2s+2} = \frac{-s+2}{\{s-(-1+i)\}\{s-(-1-i)\}}\ ,$$

$$Z(s)=\frac{\begin{vmatrix} s+1 & \dfrac{1}{s+1} \\ s+2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & s \\ s+2 & 2(s+1) \end{vmatrix}}=\left\{(s+1)-\frac{s+2}{s+1}\right\}\frac{1}{s^2+2s+2}$$

$$=\frac{s^2+s-1}{(s+1)(s^2+2s+2)}=\frac{s^2+s-1}{(s+1)\{s-(-1+i)\}\{s-(-1-i)\}}$$

が得られる．

したがって，$Y(s)$, $Z(s)$の逆ラプラス変換を求めればよい．

$Y(s)e^{st}$の孤立特異点は，$s=-1\pm i$である．$s=-1\pm i$は共に，1位の極であり

$$\lim_{s\to-1+i}\{s-(-1+i)\}Y(s)e^{st}=\lim_{s\to-1+i}\{s-(-1+i)\}\cdot\frac{-s+2}{\{s-(-1+i)\}\{s-(-1-i)\}}e^{st}$$

$$=\lim_{s\to-1+i}\frac{-s+2}{s-(-1-i)}e^{st}$$

$$=\frac{-(-1+i)+2}{(-1+i)-(-1-i)}e^{(-1+i)t}$$

$$=\frac{3-i}{2i}e^{-t+ti}$$

$$=\frac{-1-3i}{2}e^{-t}(\cos t+i\sin t),$$

$$\lim_{s\to-1-i}\{s-(-1-i)\}Y(s)e^{st}=\lim_{s\to-1-i}\{s-(-1-i)\}\cdot\frac{-s+2}{\{s-(-1+i)\}\{s-(-1-i)\}}e^{st}$$

$$=\lim_{s\to-1-i}\frac{-s+2}{s-(-1+i)}e^{st}$$

$$=\frac{-(-1-i)+2}{(-1-i)-(-1+i)}e^{(-1-i)t}$$

$$=\frac{3+i}{-2i}e^{-t-ti}$$

$$=\frac{-1+3i}{2}e^{-t}(\cos t-i\sin t),$$

であるから

$$\mathrm{Res}\left[Y(s)e^{st},\,-1+i\right]=\frac{-1-3i}{2}e^{-t}(\cos t+i\sin t)\quad,\mathrm{Res}\left[Y(s)e^{st},\,-1-i\right]=\frac{-1+3i}{2}e^{-t}(\cos t-i\sin t)$$

となることがわかる．

よって

$$
\begin{aligned}
y(t)=L^{-1}[Y(s)]&=\mathrm{Res}\left[Y(s)e^{st},\,-1+i\right]+\mathrm{Res}\left[Y(s)e^{st},\,-1-i\right]\\
&=\frac{-1-3i}{2}e^{-t}(\cos t+i\sin t)+\frac{-1+3i}{2}e^{-t}(\cos t-i\sin t)\\
&=\left(\frac{-1-3i}{2}+\frac{-1+3i}{2}\right)e^{-t}\cos t+\left(\frac{-i+3}{2}+\frac{i+3}{2}\right)e^{-t}\sin t\\
&=-e^{-t}\cos t+3e^{-t}\sin t\\
&=e^{-t}(-\cos t+3\sin t)
\end{aligned}
$$

である．

さらに，$Z(s)e^{st}$の孤立特異点は，$s=-1,\ -1\pm i$である．$s=-1,\ -1\pm i$は，いずれも1位の極であり

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to-1}(s+1)Z(s)e^{st}&=\lim_{s\to-1}(s+1)\cdot\frac{s^2+s-1}{(s+1)\{s-(-1+i)\}\{s-(-1-i)\}}e^{st}\\
&=\lim_{s\to-1}\frac{s^2+s-1}{\{s-(-1+i)\}\{s-(-1-i)\}}e^{st}\\
&=\frac{-1}{-i\times i}e^{-t}\\
&=-e^{-t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to-1+i}\{s-(-1+i)\}Z(s)e^{st}&=\lim_{s\to-1+i}\{s-(-1+i)\}\cdot\frac{s^2+s-1}{(s+1)\{s-(-1+i)\}\{s-(-1-i)\}}e^{st}\\
&=\lim_{s\to-1+i}\frac{s^2+s-1}{(s+1)\{s-(-1-i)\}}e^{st}\\
&=\lim_{s\to-1+i}\frac{(s^2+2s+2)-s-3}{(s+1)\{s-(-1-i)\}}e^{st}\\
&=\frac{-(-1+i)-3}{\{(-1+i)+1\}\{(-1+i)-(-1-i)\}}e^{(-1+i)t}\\
&=\frac{-2-i}{i\times 2i}e^{-t+ti}\\
&=\frac{2+i}{2}e^{-t}(\cos t+i\sin t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to -1-i}\{s-(-1-i)\}Z(s)e^{st} &= \lim_{s\to -1-i}\{s-(-1-i)\}\cdot\frac{s^2+s-1}{(s+1)\{s-(-1+i)\}\{s-(-1-i)\}}e^{st}\\
&= \lim_{s\to -1-i}\frac{s^2+s-1}{(s+1)\{s-(-1+i)\}}e^{st}\\
&= \lim_{s\to -1-i}\frac{(s^2+2s+2)-s-3}{(s+1)\{s-(-1+i)\}}e^{st}\\
&= \frac{-(-1-i)-3}{\{(-1-i)+1\}\{(-1-i)-(-1+i)\}}e^{(-1-i)t}\\
&= \frac{-2+i}{-i\times(-2i)}e^{-t-ti}\\
&= \frac{2-i}{2}e^{-t}(\cos t - i\sin t)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Res}\left[Z(s)e^{st},\ -1\right] = -e^{-t},\\
&\mathrm{Res}\left[Z(s)e^{st},\ -1+i\right] = \frac{2+i}{2}e^{-t}(\cos t + i\sin t),\\
&\mathrm{Res}\left[Z(s)e^{st},\ -1-i\right] = \frac{2-i}{2}e^{-t}(\cos t - i\sin t)
\end{aligned}
$$

となることがわかる．

よって

$$
\begin{aligned}
z(t) = L^{-1}[Z(s)] &= \mathrm{Res}\left[Z(s)e^{st},\ -1\right] + \mathrm{Res}\left[Z(s)e^{st},\ -1+i\right] + \mathrm{Res}\left[Z(s)e^{st},\ -1-i\right]\\
&= -e^{-t} + \frac{2+i}{2}e^{-t}(\cos t + i\sin t) + \frac{2-i}{2}e^{-t}(\cos t - i\sin t)\\
&= -e^{-t} + \left(\frac{2+i}{2}+\frac{2-i}{2}\right)e^{-t}\cos t + \left(\frac{2i-1}{2}+\frac{-2i-1}{2}\right)e^{-t}\sin t\\
&= -e^{-t} + 2e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t\\
&= e^{-t}(-1+2\cos t - \sin t)
\end{aligned}
$$

である．

【解答終】

参考文献

1) 福田安蔵，鈴木七緒，安岡善則，黒崎千代子共編「詳解応用解析演習」共立出版，1970
2) 植之原裕行，宮本智之共著「スタンダード工学系のフーリエ解析・ラプラス変換」講談社，2015
3) 水本久夫「解析学の基礎」培風館，1989
4) 矢野健太郎，石原繁共著「基礎解析学コース応用解析」裳華房，1996
5) 田河生長，斎藤四郎，斎藤斉，高遠節夫，玉木正一共著「応用数学」大日本図書，1995