

大学初年次における数学教材の提案（その 22）

～アダマールの不等式～

貴田 研司*¹

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol. 22 ～ Hadamard Inequality ～

by

Kenshi KIDA *¹

(received on Nov. 30, 2018 & accepted on Jan. 10, 2019)

あらまし

行列式の絶対値の上限に関して、アダマールの不等式と呼ばれるものがある。この論文ではアダマールの不等式を、正値エルミート行列を用いて詳細に証明することを目標とする。

Abstract

With respect to supremum of absolute values of determinants, we give the Hadamard inequality. The purpose of this paper is to present a full proof by means of positive-definite Hermitian matrices .

キーワード: 正値エルミート行列, 行列式, アダマールの不等式

Keywords: Positive-Definite Hermitian Matrix , Determinant , Hadamard Inequality

1. はじめに

線形代数で学ぶ行列式については様々なことが知られている。行列式の絶対値の上限についての、アダマールの不等式と呼ばれる次の定理がある。

定理(アダマールの不等式)

n 次行列

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \quad (\text{ただし, } \mathbf{a}_k \text{ を } A \text{ の第 } k \text{ 列とする})$$

に対して

$$\text{abs}|A| \leq \|\mathbf{a}_1\| \|\mathbf{a}_2\| \cdots \|\mathbf{a}_n\|$$

が成り立つ。

これについていくつかの証明方法が知られているが、エルミート形式を用いた証明を与えることとする¹⁾²⁾³⁾⁴⁾⁵⁾。

今、複素数を成分とする n 次行列 M の転置共役行列を M^* と表すことにする。 $A^* = A$ を満たすものをエルミート行列といい、 $U^* = U^{-1}$ を満たすものをユニタリー行列という。これらについて以下の 3 つの定理が成り立つことが知られている。

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus,
Associate Professor

定理 1.1

エルミート行列の対角成分および固有値はすべて実数である.

定理 1.2

ユニタリー行列の固有値はすべて絶対値が 1 の複素数である.

定理 1.3

n 次エルミート行列 A は, 適当なユニタリー行列 U によって

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{ は } A \text{ の固有値})$$

と対角化できる.

2. エルミート形式

今

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (\text{ただし, } a_{ij} = \overline{a_{ji}})$$

を n 次エルミート行列

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

を n 次元複素ベクトルとすると

$$f(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (A\mathbf{x})^* \mathbf{x} = \mathbf{x}^* A \mathbf{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j} a_{ij} \overline{x_i} x_j$$

(ただし, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}^* \mathbf{u} = {}^t \mathbf{u} \overline{\mathbf{v}}$ で n 次元複素ベクトル空間 \mathbb{C}^n の標準内積を表す)

のことを, x_1, x_2, \dots, x_n に関する a_{ij} を係数とするエルミート形式といい, A をエルミート形式 $f(\mathbf{x})$ の係数行列という. また, エルミート形式は必ず実数の値をとる.

$f(\mathbf{x})$ がベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ に対して, 常に $f(\mathbf{x}) > 0$ となるとき, $f(\mathbf{x})$ を正値エルミート形式とよび, A を正値エルミート行列と呼ぶ. また, 任意のベクトル \mathbf{x} に対して, $f(\mathbf{x}) \geq 0$ となるときには, f および A は半正値であるといわれる.

定理 2.1

複素数を成分とする n 次行列 A について、半正値エルミート行列であるための必要十分条件は、すべての固有値が非負であることである。

特に、正値エルミート行列であるための必要十分条件は、すべての固有値が正であることである。

定理 2.2

複素数を成分とする n 次行列 A について、半正値エルミート行列であるための必要十分条件は、 $A = P^*P$ となるような n 次行列 P が存在することである。

特に、正値エルミート行列であるための必要十分条件は、 $A = P^*P$ となるような n 次正則行列 P が存在することである。

定理 2.3

半正値エルミート行列の任意の対角小行列（主対角線上にある小行列）は、これもまた半正値エルミート行列である。また、正値エルミート行列の任意の対角小行列は、これもまた正値エルミート行列である。

(証明)

今

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

が半正値エルミート行列であるとき、 i_1 行、 i_2 行、 \dots 、 i_r 行および i_1 列、 i_2 列、 \dots 、 i_r 列で作った対角小行列を

$$H_{(i_1, i_2, \dots, i_r)} = \begin{pmatrix} h_{i_1 i_1} & h_{i_1 i_2} & \cdots & h_{i_1 i_r} \\ h_{i_2 i_1} & h_{i_2 i_2} & \cdots & h_{i_2 i_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{i_r i_1} & h_{i_r i_2} & \cdots & h_{i_r i_r} \end{pmatrix} \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n)$$

としておく。

半正値エルミート形式

$$x^* H x = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

において、 x の $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$ 以外の成分をすべて 0 にした列ベクトルを $x_{(i_1, i_2, \dots, i_r)}$ と表せば

*以下の式が成り立つことについては、p. 4 の (定理 2.3 の補足) を参照されたい。

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{x}_{(i_1, i_2, \dots, i_r)}\}^* H \mathbf{x}_{(i_1, i_2, \dots, i_r)} &= \sum_{i_k, i_l} h_{i_k i_l} \overline{x_{i_k}} x_{i_l} \\
 &= (\overline{x_{i_1}}, \overline{x_{i_2}}, \dots, \overline{x_{i_r}}) \begin{pmatrix} h_{i_1 i_1} & h_{i_1 i_2} & \dots & h_{i_1 i_r} \\ h_{i_2 i_1} & h_{i_2 i_2} & \dots & h_{i_2 i_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{i_r i_1} & h_{i_r i_2} & \dots & h_{i_r i_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix} \\
 &= (\overline{x_{i_1}}, \overline{x_{i_2}}, \dots, \overline{x_{i_r}}) H_{(i_1, i_2, \dots, i_r)} \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_r} \end{pmatrix} \geq 0
 \end{aligned}$$

であるから, $H_{(i_1, i_2, \dots, i_r)}$ は, 半正値エルミート行列であることが示された.

また, 正値エルミート行列の場合についても全く同様に証明される.

(証明終)

(定理 2.3 の補足)

例えば, H が 5 次行列の場合に

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & h_{25} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & h_{35} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} & h_{45} \\ h_{51} & h_{52} & h_{53} & h_{54} & h_{55} \end{pmatrix}$$

とすると

$$\mathbf{x}_{(2,5)} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad \{\mathbf{x}_{(2,5)}\}^* = (0, \overline{x_2}, 0, 0, \overline{x_5})$$

に対して

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{x}_{(2,5)}\}^* H \mathbf{x}_{(2,5)} &= (0, \overline{x_2}, 0, 0, \overline{x_5}) \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & h_{25} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & h_{35} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} & h_{45} \\ h_{51} & h_{52} & h_{53} & h_{54} & h_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix} \\
 &= (h_{21}\overline{x_2} + h_{51}\overline{x_5}, h_{22}\overline{x_2} + h_{52}\overline{x_5}, h_{23}\overline{x_2} + h_{53}\overline{x_5}, h_{24}\overline{x_2} + h_{54}\overline{x_5}, h_{25}\overline{x_2} + h_{55}\overline{x_5}) \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ x_5 \end{pmatrix} \\
 &= h_{22}\overline{x_2}x_2 + h_{52}\overline{x_5}x_2 + h_{25}\overline{x_2}x_5 + h_{55}\overline{x_5}x_5 \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

である.

一方, H の 2 行, 5 行および 2 列, 5 列で作った対角小行列 $H_{(2,5)}$ を考えると

$$(\overline{x_2}, \overline{x_5}) H_{(2,5)} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = (\overline{x_2}, \overline{x_5}) \begin{pmatrix} h_{22} & h_{25} \\ h_{52} & h_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= (h_{22}\bar{x}_2 + h_{52}\bar{x}_5, h_{25}\bar{x}_2 + h_{55}\bar{x}_5) \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} \\
 &= h_{22}\bar{x}_2x_2 + h_{52}\bar{x}_5x_2 + h_{25}\bar{x}_2x_5 + h_{55}\bar{x}_5x_5 \cdots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

であるから、①と②より

$$\{\mathbf{x}_{(2,5)}\}^* H \mathbf{x}_{(2,5)} = (\bar{x}_2, \bar{x}_5) H_{(2,5)} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

となっていることがわかる。

定理 2.4

対角成分がすべて 1 であるような n 次半正値エルミート行列 H に対して $|H| \leq 1$ が成り立つ。等号は $H = E$ のときにのみ成り立つ。

(証明)

今、 H の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とすると、半正値エルミート行列なので

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$$

となっている。よってあるユニタリー行列 U が存在して

$$U^* H U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

すなわち

$$H = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} U^*$$

が成り立つ。さらに、 $|H| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ である。

ここで、算術平均と幾何平均の関係を用いると

$$\sqrt[n]{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n} \leq \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}{n}$$

なので、両辺の n 乗を考えると

$$|H| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \leq \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}{n} \right)^n \cdots \textcircled{1}$$

が得られる。ところが、 H は対角成分がすべて 1 である n 次行列であるから

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \text{tr} H = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

なので①より

$$|H| \leq \left(\frac{1 + 1 + \cdots + 1}{n} \right)^n = 1$$

となっていることがわかる。

等号が成り立つのは、 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \dots, \lambda_n = 1$ の場合のみであり、このときは

$$H = U \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} U^* = E$$

であることがわかる.

(証明終)

定理 2.5

ある正値エルミート行列

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & P \\ Q & H_2 \end{pmatrix}$$

(ただし, H_1 は k 次行列, P は (k, l) 型次行列, Q は (l, k) 型次行列, H_2 は l 次行列)

において, $P = 0_{k,l}$, $Q = 0_{l,k}$ (ただし, $0_{s,t}$ は (s, t) 型零行列を表す) とした行列

$$H_0 = \begin{pmatrix} H_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & H_2 \end{pmatrix}$$

を作ると

$$|H| \leq |H_0|$$

が成り立つ. 等号が成り立つのは $P = 0_{k,l}$, $Q = 0_{l,k}$ すなわち $H = H_0$ のときに限る.

(証明)

正値エルミート行列の任意の対角小行列は正値エルミート行列なので, H_1, H_2 も正値エルミート行列である.

したがって, 定理 2.2 よりある正則行列 A_1, A_2 が存在して

$$H_1 = A_1^* A_1, H_2 = A_2^* A_2$$

と書くことができる.

一方, B_1 は k 次行列, B_2 は (k, l) 型次行列, B_3 は (l, k) 型次行列, B_4 は l 次行列であるとき

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} B_1^* & B_3^* \\ B_2^* & B_4^* \end{pmatrix}$$

が成り立つことに留意しておく. すると, 直接の計算により

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} E_k & (A_1^*)^{-1} P A_2^{-1} \\ (A_2^*)^{-1} Q A_1^{-1} & E_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1^* & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k & (A_1^*)^{-1} P A_2^{-1} \\ (A_2^*)^{-1} Q A_1^{-1} & E_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1^* & P A_2^{-1} \\ Q A_1^{-1} & A_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1^* A_1 & P \\ Q & A_2^* A_2 \end{pmatrix} = H \end{aligned}$$

となることがわかるので

$$H = \begin{pmatrix} A_1^* & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k & (A_1^*)^{-1}PA_2^{-1} \\ (A_2^*)^{-1}QA_1^{-1} & E_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2 \end{pmatrix}$$

が成り立ち.

特に $P = 0_{k,l}$, $Q = 0_{l,k}$ の場合には

$$H_0 = \begin{pmatrix} A_1^* & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & E_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2 \end{pmatrix}$$

となることが示される.

さて任意の $x (\neq 0) \in C^{k+l}$ に対して $C^{k+l} \ni y = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2 \end{pmatrix}^{-1} x (\neq 0)$ すなわち $x = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2 \end{pmatrix} y$ とお

くと, H は正値エルミート行列なので

$$\begin{aligned} x^* \begin{pmatrix} E_k & (A_1^*)^{-1}PA_2^{-1} \\ (A_2^*)^{-1}QA_1^{-1} & E_l \end{pmatrix} x &= \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2 \end{pmatrix} y \right\}^* \begin{pmatrix} E_k & (A_1^*)^{-1}PA_2^{-1} \\ (A_2^*)^{-1}QA_1^{-1} & E_l \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2 \end{pmatrix} y \right\} \\ &= y^* \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} E_k & (A_1^*)^{-1}PA_2^{-1} \\ (A_2^*)^{-1}QA_1^{-1} & E_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2 \end{pmatrix} y \\ &= y^* \begin{pmatrix} A_1^* & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k & (A_1^*)^{-1}PA_2^{-1} \\ (A_2^*)^{-1}QA_1^{-1} & E_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2 \end{pmatrix} y \\ &= y^* H y > 0 \end{aligned}$$

であるから $\begin{pmatrix} E_k & (A_1^*)^{-1}PA_2^{-1} \\ (A_2^*)^{-1}QA_1^{-1} & E_l \end{pmatrix}$ も正値エルミート行列であることが示された. 対角成分はすべて 1 である.

したがって, 上の定理 2.4 により

$$\left| \begin{pmatrix} E_k & (A_1^*)^{-1}PA_2^{-1} \\ (A_2^*)^{-1}QA_1^{-1} & E_l \end{pmatrix} \right| \leq 1 = \left| \begin{pmatrix} E_k & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & E_l \end{pmatrix} \right|$$

であり, 等号が成り立つのは

$$(A_1^*)^{-1}PA_2^{-1} = 0_{k,l}, (A_2^*)^{-1}QA_1^{-1} = 0_{l,k} \text{ すなわち } P = 0_{k,l}, Q = 0_{l,k}$$

のときに限るから

$$|H| = \left| \begin{pmatrix} A_1^* & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2^* \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} E_k & (A_1^*)^{-1}PA_2^{-1} \\ (A_2^*)^{-1}QA_1^{-1} & E_l \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2 \end{pmatrix} \right| \leq \left| \begin{pmatrix} A_1^* & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2^* \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} E_k & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & E_l \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} A_1 & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & A_2 \end{pmatrix} \right| = |H_0|$$

が成り立ち, 等号は $\begin{pmatrix} E_k & (A_1^*)^{-1}PA_2^{-1} \\ (A_2^*)^{-1}QA_1^{-1} & E_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & 0_{k,l} \\ 0_{l,k} & E_l \end{pmatrix} = E_{k+l}$ であるとき, すなわち $H = H_0$

のときに限る.

(証明終)

この定理 2.5 を繰り返して適用すると, 次の定理が得られる.

定理 2.6

n 次行列

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

が, 正値エルミート行列ならば

$$|H| \leq h_{11}h_{22} \cdots h_{nn}$$

であり, 等号が成り立つのは, H が対角行列であるとき, すなわち

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

のときに限る.

(証明)

定理 2.5 を繰り返して用いると

$$\begin{aligned} |H| &= \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} h_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} = h_{11} \begin{vmatrix} h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} \\ &\leq h_{11} \begin{vmatrix} h_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{33} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & h_{n3} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} = h_{11}h_{22} \begin{vmatrix} h_{33} & \cdots & h_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n3} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix} \leq \cdots \leq h_{11}h_{22} \cdots h_{nn} \end{aligned}$$

が得られる.

等号が成り立つのは, H のすべての非対角成分が 0 であるとき, すなわち

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

のときに限る.

(証明終)

3. アダマールの不等式

第2章で示した定理2.6などを用いて, アダマールの不等式を証明する.

定理(アダマールの不等式)

n 次行列 A を

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n) \quad (\text{ただし, } \mathbf{a}_k \text{ を } A \text{ の第 } k \text{ 列とする})$$

と表すとき

$$\text{abs}|A| \leq \|a_1\| \|a_2\| \cdots \|a_n\| \quad (\text{ただし, } \text{abs } \alpha \text{ は複素数 } \alpha \text{ の絶対値を表す})$$

が成り立つ. 等号が成り立つのは $(a_j, a_i) = a_i^* a_j = 0 \quad (i \neq j)$ のときに限る.

ただし, $\|a_k\| = \sqrt{(a_k, a_k)} = \sqrt{a_k^* a_k}$ と定義されており, a_k のノルムと呼ばれる.

(証明)

任意の n 次正則行列 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ に対して

$$H = A^* A = \begin{pmatrix} a_1^* a_1 & & * & \\ & a_2^* a_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_n^* a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|a_1\|^2 & & * & \\ & \|a_2\|^2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \|a_n\|^2 \end{pmatrix}$$

は, 定理2.2より正値エルミート行列であるから, 定理2.6より

$$|H| \leq \|a_1\|^2 \|a_2\|^2 \cdots \|a_n\|^2$$

が成り立つことがわかる. また

$$|H| = |A^*| |A| = \overline{|A|} |A| = (\text{abs}|A|)^2$$

であるから

$$(\text{abs}|A|)^2 \leq \|a_1\|^2 \|a_2\|^2 \cdots \|a_n\|^2$$

が成り立つことが示される.

したがって

$$\text{abs}|A| \leq \|a_1\| \|a_2\| \cdots \|a_n\|$$

が得られる.

定理2.6より, 等号が成り立つのは H が対角行列であるとき, すなわち $(a_i, a_j) = a_j^* a_i = 0 \quad (i \neq j)$ のときに限る.

(証明終)

4. おわりに

アダマールの不等式は, 以下の形で記述されることもある²⁾⁶⁾.

n 次行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と表しておく.

A の n^2 個の成分の絶対値の最大値を M すなわち, $|a_{kl}| \leq M \quad (k, l = 1, 2, \dots, n)$ とおくと

$$\|a_r\|^2 = |a_{1r}|^2 + |a_{2r}|^2 + \cdots + |a_{nr}|^2 \leq nM^2 \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

となっているから

$$\|a_r\| \leq \sqrt{n}M \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

が得られる.

よって

$$\text{abs}|A| \leq \|a_1\| \|a_2\| \cdots \|a_n\| \leq \sqrt{n^n} M^n$$

が成り立つことが示される。

参考文献

- 1) 遠山啓「行列論」共立出版，1952
- 2) 佐武一郎「線型代数学」裳華房，1958
- 3) 佐藤正次，永井治 共編「基礎課程 線型代数学」学術図書出版，1976
- 4) 横山雄一「線形代数学」昭晃堂，1975
- 5) 川原雄作，木村哲三，藪康彦，亀田真澄 共著「線形代数の基礎」共立出版，1994
- 6) 後藤憲一，山本邦夫，神吉健 共著「詳解物理応用数学演習」共立出版，1979