東海大学紀要情報通信学部
Vol.10,No.1,2017,pp.78-91

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 8）
～ジョルダン標準形と微分方程式～

貴田 研司[*1]

Suggestion about Mathematical Material for Freshman Education Vol.8
~ Jordan Standard Form and Differential Equations ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on May 26, 2017 & accepted on Jul. 13, 2017)

あらまし

線形代数に含まれる重要な事項として，固有値と固有ベクトルの概念そして行列の対角化およびジョルダン標準形が挙げられる．行列の対角化およびジョルダン標準形についての計算例を丁寧に解説したのち，その応用の具体的な例として，定数係数連立微分方程式の行列を用いた解法について紹介する．

Abstract

As important items in linear algebra, we give a concept of eigen values and eigen vectors, diagonalization, and Jordan standard form. First, we explain examples of diagonalizations, and Jordan standard forms, kindly. Further, we present methods of solution of system of differential equations by matrices as concrete examples of applied diagonalizations, and Jordan standard forms

キーワード：連立微分方程式，対角化，ジョルダン標準形
Keywords: *System of Differential Equations, Diagonalization, Jordan Standard Form*

1．はじめに

大学初年次の線形代数では，行列の対角化およびジョルダン標準形について学ぶ．本論文ではその一つの応用として，定数係数 1 階線形連立常微分方程式を，係数行列を対角化するか，またはジョルダン標準形を求めることを利用しての解法について紹介する．

まず一般の， n 個の未知関数 $x_1(t),\ x_2(t), \cdots, x_n(t)$ についての， 1 階線形連立常微分方程式

$$
(*)\begin{cases}
\dfrac{d}{dt}x_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\
\dfrac{d}{dt}x_2(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\
\qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{d}{dt}x_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t)
\end{cases}
$$

を考える．ここでは簡単のために，各 $a_{ij}(t),\ b_k(t)$ は，実数直線上で定義された連続関数としておく．

常微分方程式を扱う場合の基礎として，解の存在及び一意性を保証する次の定理がある．

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus,
Associate Professor

定理[1)]

常微分方程式$(*)$は，初期条件

$$x_1(\tau)=\xi_1,\ x_2(\tau)=\xi_2,\cdots\cdots,\ x_n(\tau)=\xi_n \qquad (\tau\in\mathbf{R};\xi_1,\ \xi_2,\cdots\cdots,\ \xi_n\in\mathbf{C})\cdots\cdots(**)$$

を任意に与えるとき，初期条件$(**)$を満たす解を，常に，しかも１組もつ．■

さてここで

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}(t)=\begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

とおけば

$$(*)' \qquad \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)=A(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}(t)$$

と表すことができることがわかる。

特に，微分方程式$(*)'$において，$\mathbf{b}(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$である場合の$\dfrac{d}{dt}\mathbf{x}(t)=A(t)\mathbf{x}(t)$を，同次微分方程式という．

2. 行列の対角化とジョルダン標準形

まず，正方行列の対角化とジョルダン標準形について述べる[2)3)]．

n次行列Aについて，相異なる固有値のすべてを$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$として，$\lambda_i$ $(1\leqq i\leqq r)$がAの固有方程式のk_i重解である，すなわち固有多項式を

$$\varphi_A(t)=|A-tE|=(\lambda_1-t)^{k_1}(\lambda_2-t)^{k_2}\cdots(\lambda_r-t)^{k_r}$$

とする．また，Aの固有値λに対して

$$W(\lambda)=\{\mathbf{v}\,|\,A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v},\ \mathbf{v}\in\mathbf{R}^{\mathbf{n}}\}$$

のことを，固有値λに対するAの固有空間といい，これについて

$$\dim W(\lambda)=n-\mathrm{rank}(A-\lambda E)$$

が成り立つ．

行列の対角化について，以下の定理が知られている．

定理（行列の対角化）

n次行列Aについて，次の(1)，(2)，(3)は同値である．

(1) A は対角化可能である．

(2) $\dim W(\lambda_i) = k_i \quad (1 \leqq i \leqq r)$

(3) n 個の一次独立な A の固有ベクトルが存在する．■

さらに，K が複素数体 $\mathbf{C}$ の部分体であるならば，任意の $A \in M_n(K)$ に対して，ある $P \in M_n(\mathbf{C})$ が存在して $P^{-1}AP$ が三角行列になるようにすることができる．ただし，体 F を成分とする n 次の正方行列の全体を $M_n(F)$ で表すこととした．この三角化について，ある意味での一意性を与えたのが，以下に示すジョルダン標準形である．さて，次の形の k 次行列

$$J(\lambda, k) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

をジョルダン細胞という．例えば

$$J(\lambda, 1) = (\lambda),\ J(\lambda, 2) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\ J(\lambda, 3) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

である．いくつかのジョルダン細胞から作られる次の形の行列

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1', k_1') & & & \\ & J(\lambda_2', k_2') & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_m', k_m') \end{pmatrix}$$

をジョルダン行列という．

n 次行列 A は，適当な正則行列 P によって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{pmatrix} \cdots\cdots(*)$$

の形に変形することができる．

ただし，$J_i = \begin{pmatrix} J(\lambda_i, R(i,1)) & & & \\ & J(\lambda_i, R(i,2)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_i, R(i, s_i)) \end{pmatrix}$ であり，s_i はジョルダン細胞 $J(\lambda_i, R(i,*))$ の個数であって，$R(i,1) + R(i,2) + \cdots + R(i, s_i) = k_i$ が成り立つ．

$(*)$の式の右辺の形を，行列 A のジョルダン標準形といい，この表し方は，ジョルダン細胞 $J(\lambda_i, R(i, *))$ の順序を無視して一意的である．

定理（ジョルダン標準形と固有空間）

n 次行列 A のジョルダン標準形の中の固有値 λ_i に対するジョルダン細胞 $J(\lambda_i, R(i, *))$ の個数 $(= s_i)$ は，固有値 λ_i に対する A の固有空間 $W(\lambda_i)$ の次元に等しい．すなわち

$$s_i = \dim W(\lambda_i) = n - \mathrm{rank}(A - \lambda_i E) \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

が成り立つ．■

次に，対角化またはジョルダン標準形の計算の例を挙げる．

例

次の行列 A について，対角化可能であるかどうかを調べ，対角化可能ならばある正則行列 P を求めて $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにせよ．また，対角化可能でない場合には，変換行列 P を求めて $P^{-1}AP$ がジョルダン標準形 J になるようにせよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

（解答）

以下，$\rightarrow$ によって行基本変形を示すものとする．

(1) まず，A の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -2 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(3-\lambda) = 0$$

なので，A の固有値は，$\lambda = 2$ (重複度 2), 3 である．さて

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より } \mathrm{rank}(A - 2E) = 1 \text{ だから } \dim W(2) = 3 - 1 = 2,$$

$$A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ より } \mathrm{rank}(A - 3E) = 2 \text{ だから } \dim W(3) = 3 - 2 = 1$$

であるから， A は対角化可能であることがわかる．

そこで，固有値 $\lambda = 2$ (重複度 2) に属する固有ベクトル $\mathbf{u}$ を求める．

$$(A-2E)\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$u_3 = u_1 + u_2$$

なので

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_1 + C_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

だから，一組の一次独立な固有ベクトルとして $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとることができる．

次に，固有値 $\lambda = 3$ に属する固有ベクトル $\mathbf{v}$ を求める．

$$(A-3E)\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$v_1 = 0, \quad -2v_2 + v_3 = 0$$

より

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_3 \\ 2C_3 \end{pmatrix} = C_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (C_3 \text{ は任意定数})$$

だから，一つの固有ベクトルとして $\mathbf{p_3}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ をとることができる．

したがって，正則行列として

$$P=\begin{pmatrix}\mathbf{p_1} & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

とおくと

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

であり

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

となる．

(2) まず，A の固有方程式は

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 1 & 2\\2 & 7-\lambda & -2 & -3\\-1 & -1 & 3-\lambda & 1\\2 & 4 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2(3-\lambda)(4-\lambda)$$

なので，A の固有値は，$\lambda=2$ (重複度 2)，3，4 である．さて

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1&-2&1&2\\2&5&-2&-3\\-1&-1&1&1\\2&4&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \text{ より } \operatorname{rank}(A-2E)=3 \text{ だから } \dim W(2)=4-3=1$$

$$A-3E=\begin{pmatrix}-2&-2&1&2\\2&4&-2&-3\\-1&-1&0&1\\2&4&-2&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&2&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \text{ より } \operatorname{rank}(A-3E)=3 \text{ だから } \dim W(3)=4-3=1$$

$$A-4E=\begin{pmatrix}-3&-2&1&2\\2&3&-2&-3\\-1&-1&-1&1\\2&4&-2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \text{ より } \operatorname{rank}(A-4E)=3 \text{ だから } \dim W(4)=4-3=1$$

だから，固有値 $\lambda = 2$ (重複度 2), 3, 4 に対するジョルダン細胞の数は，それぞれ1, 1, 1個であることがわかる．したがって，行列 A のジョルダン標準形 J は

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

である．今，変換行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4 \end{pmatrix}$$

とおくことにすると

$$AP = A\begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{p}_1 & A\mathbf{p}_2 & A\mathbf{p}_3 & A\mathbf{p}_4 \end{pmatrix},$$

$$PJ = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2 & 3\mathbf{p}_3 & 4\mathbf{p}_4 \end{pmatrix}$$

となるが $AP = PJ$ が成り立つとすると

$$\begin{cases} A\mathbf{p}_1 = 2\mathbf{p}_1 \cdots\cdots ① \\ A\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2 \cdots\cdots ② \\ A\mathbf{p}_3 = 3\mathbf{p}_3 \cdots\cdots ③ \\ A\mathbf{p}_4 = 4\mathbf{p}_4 \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

が成り立つ．

①より

$$(A - 2E)\mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \text{ すなわち } \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$x_1 = x_3,\ x_2 = 0,\ x_4 = 0$$

なので

$$\mathbf{p_1}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\\0\\C_1\\0\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\qquad (C_1 \text{ は任意定数})$$

なので，例えば $\mathbf{p_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ をとる．

②について，上で求めた $\mathbf{p_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ に対して

$$(A-2E)\mathbf{p}_2=\mathbf{p}_1 \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix}-1&-2&1&2\\2&5&-2&-3\\-1&-1&1&1\\2&4&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

を解くと

$$\left(\begin{array}{cccc|c}-1&-2&1&2&1\\2&5&-2&-3&0\\-1&-1&1&1&1\\2&4&-2&-2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&0&-1\\0&0&0&1&1\\0&1&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

であるから

$$y_1=y_3-1,\qquad y_4=1,\qquad y_2=1$$

となっているので

$$\mathbf{p}_2=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_2-1\\1\\C_2\\1\end{pmatrix}\qquad (C_2 \text{ は任意定数})$$

なので，例えば $C_2 = 1$ とおいて，$\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとる．

③より

$$\left(A-3E\right)\mathbf{p}_3 = \mathbf{0} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$z_1 = z_2, \quad z_4 = 2z_2, \quad z_3 = 0$$

となっているので

$$\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_3 \\ C_3 \\ 0 \\ 2C_3 \end{pmatrix} = C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \left(C_3 \text{ は任意定数}\right)$$

なので，例えば $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ をとる．

④より

$$\left(A-4E\right)\mathbf{p}_4 = \mathbf{0} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くと

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから

$$w_1 = 0, \quad w_2 = w_4, \quad w_3 = 0$$

となっているので

$$\mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_4 \\ 0 \\ C_4 \end{pmatrix} = C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (C_4 \text{ は任意定数})$$

なので，例えば $\mathbf{p}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとる．

したがって，変換行列として

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくことにすれば

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

であり $AP = PJ$ すなわち $P^{-1}AP = J$ により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} (= J)$$

が成り立つ．

【解答終】

3. 定数係数1階線形連立微分方程式

第1章で述べた連立微分方程式 $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)=A(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}(t)$ について，係数行列 $A(t)$ の成分がすべて定数の場合を考える．そして，改めて係数行列を A と表記することにする．さらに，$\mathbf{x}(t)=P\mathbf{y}(t)$ と変数変換すると $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)=P\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t)$ であるから，微分方程式 $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t)=A\mathbf{x}(t)+\mathbf{b}(t)$ は

$$P\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t)=AP\mathbf{y}(t)+\mathbf{b}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t)=P^{-1}AP\mathbf{y}(t)+P^{-1}\mathbf{b}(t)$$

と変形することができる．

この章では，正方行列 A に対して，ある正則行列 P を求めることにより $P^{-1}AP$ が対角行列か，またはジョルダン標準形となるようにすることができることを利用した，連立微分方程式の解法について述べる[3)4)5)]．

例題（定数係数1階線形連立微分方程式）

次の連立微分方程式を解け．ただし，x_1, x_2, x_3, x_4 は t の関数とする．

(1) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 \\ x_2' = -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 \\ x_2' = 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 3x_4 \\ x_3' = -x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \\ x_4' = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \end{cases}$

（解答）

(1) 行列を用いて表示すると

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

となるが　$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ とおくと，$\mathbf{x}'=A\mathbf{x}$ と書くことができる．

ところが，**例**(1)より A は対角化可能であり，正則行列として $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ をとると

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

さて，$\mathbf{x}=P\mathbf{y}$ とおくと $\mathbf{x}'=(P\mathbf{y})'=P\mathbf{y}'$ なので，$\mathbf{x}'=A\mathbf{x}$ より $P\mathbf{y}'=AP\mathbf{y}$ となる．

よって，$\mathbf{y}'=(P^{-1}AP)\mathbf{y}$ が得られる．ここで $\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，$\mathbf{y}'=\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \text{すなわち} \begin{cases} y_1'=2y_1 \cdots\cdots ① \\ y_2'=2y_2 \cdots\cdots ② \\ y_3'=3y_3 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

を解いて

$$y_1=C_1e^{2t}, \ y_2=C_2e^{2t}, \ y_3=C_3e^{3t} \qquad (C_1,\ C_2,\ C_3 \text{は任意定数})$$

となることがわかる．したがって，$\mathbf{x}=P\mathbf{y}$ より

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1e^{2t} \\ C_2e^{2t} \\ C_3e^{3t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1e^{2t} \\ C_2e^{2t}+C_3e^{3t} \\ (C_1+C_2)e^{2t}+2C_3e^{3t} \end{pmatrix}$$

が得られる．

(2) 行列を用いて表示すると

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

となるが $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$，$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix}$ とおくと，$\mathbf{x}'=A\mathbf{x}$ と書くことができる．

ところが，**例**(2)で示したように，A に対して変換行列として $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ をとると

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．さて，$\mathbf{x}=P\mathbf{y}$ とおくと $\mathbf{x}'=(P\mathbf{y})'=P\mathbf{y}'$ なので，$\mathbf{x}'=A\mathbf{x}$ より $P\mathbf{y}'=AP\mathbf{y}$ となる．

よって，$\mathbf{y}'=\left(P^{-1}AP\right)\mathbf{y}$ が得られる．ここで $\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$，$\mathbf{y}'=\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \text{すなわち} \begin{cases} y_1'=2y_1+y_2 \cdots\cdots ① \\ y_2'=2y_2 \cdots\cdots ② \\ y_3'=3y_3 \cdots\cdots ③ \\ y_4'=4y_4 \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

を解くと，まず②, ③, ④より

$$y_2=C_1e^{2t},\ y_3=C_2e^{3t},\ y_4=C_3e^{4t} \qquad \left(C_1,\ C_2,\ C_3 \text{は任意定数}\right)$$

となることがわかる．さらに①について，上で求めた $y_2=C_1e^{2t}$ に対して

$$y_1'-2y_1=C_1e^{2t}$$

となるが，これは 1 階線形微分方程式である．ところが，1 階線形微分方程式 $y'+P(x)y=Q(x)$ の一般解は

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left\{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right\} \qquad \left(C \text{は任意定数}\right)$$

で与えられることが知られている [4]．よって

$$\begin{aligned} y_1&=e^{-\int(-2)dt}\left\{\int e^{\int(-2)dt}\cdot C_1e^{2t}dt+C_4\right\} \qquad \left(C_4 \text{は任意定数}\right) \\ &=e^{2t}\left(\int e^{-2t}\cdot C_1e^{2t}dt+C_4\right) \\ &=e^{2t}\left(\int C_1dt+C_4\right) \\ &=\left(C_1t+C_4\right)e^{2t} \end{aligned}$$

が得られる．

したがって，$\mathbf{x}=P\mathbf{y}$ より

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(C_1t+C_4\right)e^{2t} \\ C_1e^{2t} \\ C_2e^{3t} \\ C_3e^{4t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \left(C_1t+C_4\right)e^{2t}+C_2e^{3t} \\ C_1e^{2t}+C_2e^{3t}+C_3e^{4t} \\ \left(C_1t+C_1+C_4\right)e^{2t} \\ C_1e^{2t}+2C_2e^{3t}+C_3e^{4t} \end{pmatrix}$$

であることがわかる．

【解答終】

4. おわりに

本論文においては，行列の対角化およびジョルダン標準形の具体的な計算例について，数多く触れることはできなかった．是非，他の著書[3)5)6)]などを参照されたい．また，定数係数1階線形連立微分方程式の解法として，行列の指数関数を使った方法もよく用いられる．

参考文献

1） 入江昭二「線形数学II」共立出版，1969
2） 川原雄作，木村哲三，藪康彦，亀田真澄共著「線形代数の基礎」共立出版，1994
3） 小寺平治「明解演習線形代数」共立出版，1982
4） 長崎憲一，中村正彰，横山利章共著「明解微分方程式 改訂版」培風館，2003
5） 富永晃「基礎演習 線形代数」聖文社，1975
6） 根本精司「線形代数例題演習」森北出版，1980