東海大学紀要情報通信学部
Vol.11,No.2,2018,pp.85-93

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 24）
～算術平均と幾何平均～

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol. 24
~ Arithmetic Mean and Geometric Mean ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on Nov. 30, 2018 & accepted on Jan. 10, 2019)

あらまし

よく知られている不等式として，算術平均と幾何平均の関係と呼ばれるものがある. この論文では算術平均と幾何平均の関係を，対数関数を用いて証明することを目標とする.

Abstract

As a well-known inequality, we give a relation between arithmetic means and geometric means. The purpose of this paper is to present a proof of the inequality by means of a logarithmic function.

キーワード:算術平均, 幾何平均, 対数関数
Keywords: *Arithmetic Mean, Geometric Mean, Logarithmic Function*

1. はじめに

よく知られている不等式として算術平均と幾何平均の関係があるのだが，まず算術平均と幾何平均について説明する． n 個の数 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ に対して

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n}{n}$$

を，これら n 個の数の算術平均または相加平均という．

また，n 個の数 $a_1 \geqq 0, a_2 \geqq 0, \cdots\cdots, a_n \geqq 0$ に対して

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots a_n}$$

を，これら n 個の数の幾何平均または相乗平均という．

算術平均と幾何平均の間には次の不等式が成り立つ．

定理 1.1（算術平均と幾何平均の関係）

n 個の数 $a_1 \geqq 0, a_2 \geqq 0, \cdots\cdots, a_n \geqq 0$ に対して

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots a_n} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n}{n}$$

であり，等号が成り立つのは $a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a_n$ のときに限る．

*1 高輪教養教育センター 准教授
Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus,
Associate Professor

この不等式は，相加・相乗平均の関係とも呼ばれ，特に$n = 2$ の場合にはよく知られている．一般の形とその証明について述べる [1)2)]．ただし，n 個の数$a_1 \geqq 0, a_2 \geqq 0, \cdots\cdots, a_n \geqq 0$の中に一つでも 0 があったならば，明らかに成り立つ不等式である．したがって以下では，$a_1 > 0, a_2 > 0, \cdots\cdots, a_n > 0$の場合についてのみ議論することとする．

2. 算術平均と幾何平均の関係の具体例

まず，$n = 2$ の場合について述べる．

定理 2.1

2個の数$a_1 > 0, a_2 > 0$ に対して

$$\sqrt{a_1 a_2} \leqq \frac{a_1 + a_2}{2}$$

であり，等号が成り立つのは$a_1 = a_2$ のときに限る．

（証明）

まず，$x = \sqrt{a_1}, y = \sqrt{a_2}$ とおく．

すると

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} &= \frac{1}{2}\left\{(a_1 + a_2) - 2\sqrt{a_1 a_2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{(x^2 + y^2) - 2xy\right\} \\ &= \frac{1}{2}(x - y)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

であるから

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqq \sqrt{a_1 a_2}$$

が成り立つことが示される．等号が成り立つのは，$x - y = 0$ すなわち，$x = y$ すなわち，$a_1 = a_2$ のとき限る．

（証明終）

次に，$n = 3$ の場合について述べる．

定理 2.2

3個の数$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ に対して

$$\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \leqq \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$$

であり，等号が成り立つのは$a_1 = a_2 = a_3$ のときに限る．

（証明）

まず，$x=\sqrt[3]{a_1}$，$y=\sqrt[3]{a_2}$，$z=\sqrt[3]{a_3}$ とおく．

すると

$$
\begin{aligned}
\frac{a_1+a_2+a_3}{3}-\sqrt[3]{a_1a_2a_3} &= \frac{1}{3}\left\{(a_1+a_2+a_3)-3\sqrt[3]{a_1a_2a_3}\right\} \\
&= \frac{1}{3}\{(x^3+y^3+z^3)-3xyz\} \\
&= \frac{1}{3}(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{2}(x+y+z)(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx) \\
&= \frac{1}{6}(x+y+z)\{(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2zx+x^2)\} \\
&= \frac{1}{6}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} \geqq 0
\end{aligned}
$$

であるから

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqq \sqrt[3]{a_1a_2a_3}$$

が成り立つことが示される．等号が成り立つのは

$$x-y=0, \qquad y-z=0, \qquad z-x=0$$

すなわち，$x=y=z$ すなわち，$a_1=a_2=a_3$ のときに限る．

（証明終）

3. 算術平均と幾何平均の関係の対数関数を利用した証明

第 1 章で述べたように，一般に次の定理

定理 3.1（算術平均と幾何平均の関係） [1)2)]

n 個の数 $a_1>0, a_2>0, \cdots\cdots, a_n>0$ に対して

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n} \leqq \frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}$$

であり，等号が成り立つのは $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n$ のときに限る．

が成り立つ．この章では対数関数を利用した証明方法について述べる．

関数 $y=\log x$ のグラフの上の点 $(a, \log a)$（a は正の定数）における接線の方程式は

$$y-\log a=\frac{1}{a}(x-a)$$

すなわち

$$y = \frac{1}{a}x + \log a - 1$$

である．

　また

$$(\log x)' = \frac{1}{x},\ \ (\log x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$$

であることから，関数$y = \log x$ のグラフは上に凸であり，接線の方が上にあることもわかる．

　よって

$$\log x \leqq \frac{1}{a}x + \log a - 1 \ \cdots\cdots ①$$

が成り立ち，等号成立は$x = a$のときに限ることがわかる．

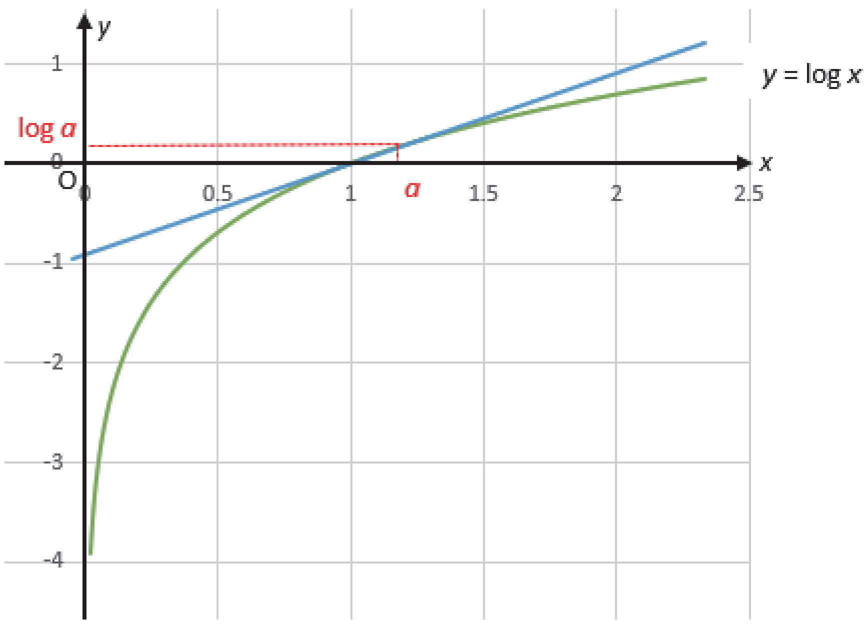

Fig.1 graph of a logarithmic function

　ここで，n個の数$a_1 > 0, a_2 > 0, \cdots\cdots, a_n > 0$に対して，算術平均を考えて

$$a = \frac{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n}{n}$$

とおくことにする．①のxに$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ を代入して得られる次のn個の不等式

$$\log a_1 \leqq \frac{1}{a}a_1 + \log a - 1$$

$$\log a_2 \leqq \frac{1}{a}a_2 + \log a - 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\log a_n \leqq \frac{1}{a}a_n + \log a - 1$$

の両辺をそれぞれ加えると

$$\log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n \leqq \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + n\log a - n$$

$$\log a_1 a_2 \cdots a_n \leqq n\log \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

であるから

$$\frac{1}{n}\log a_1 a_2 \cdots a_n \leqq \log \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

$$\log\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqq \log \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

が得られる．関数$y = \log x$ は連続な狭義の単調増加関数であるから

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

が成り立つことが示される．

等号が成り立つのは

$$a_1 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n}{n}, a_2 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n}{n}, \cdots\cdots, a_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n}{n}$$

すなわち

$$a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a_n$$

のときに限る．

（証明終）

4. 算術平均と幾何平均の関係の拡張

第2章で述べた

定理 2.1

2個の数$a_1 > 0, a_2 > 0$に対して

$$\sqrt{a_1 a_2} \leqq \frac{a_1 + a_2}{2}$$

であり，等号が成り立つのは$a_1 = a_2$ のときに限る．

の拡張となっている定理を紹介する．

定理 4.1

$p, q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$のとき，$a > 0, b > 0$に対して

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leqq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

であり，等号が成り立つのは $a = b$ のときに限る．

（証明）

曲線$y = x^k \quad (0 < k < 1)$について，$y' = kx^{k-1}$なので点$(1,1)$における接線の方程式は

$$y - 1 = k(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y = kx + 1 - k$$

である．さらに $-1 < k-1 < 0$ に留意すると$x > 0$ のとき

$$y'' = k(k-1)x^{k-2} < 0$$

であるから，曲線$y = x^k \quad (0 < k < 1)$ は上に凸であり，接線の方が上にあることがわかる．

したがって$x > 0$のとき

$$kx + 1 - k \geqq x^k \cdots\cdots (*)$$

であり，等号が成り立つのは $x = 1$ のときに限ることがわかる．

$(*)$において $x = \frac{a}{b} > 0, \quad k = \frac{1}{p} \quad \left(0 < \frac{1}{p} < 1\right)$ とおくと

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{a}{b} + 1 - \frac{1}{p} \geqq \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{a}{b} + 1 - \frac{1}{p} \geqq a^{\frac{1}{p}} b^{-\frac{1}{p}}$$

ここで，$1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$，$-\frac{1}{p} = \frac{1}{q} - 1$であるから

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{a}{b} + \frac{1}{q} \geqq a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}-1}$$

両辺をb倍すると

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} \geqq a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}}$$

が得られる．

また，等号が成り立つのは $x = \frac{a}{b} = 1$ すなわち，$a = b$ のときに限ることもわかる．

（証明終）

定理4.1において，$p = 2,\ q = 2$とすれば

$$a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$$

すなわち

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2}$$

の形となるので，定理4.1は定理2.1の拡張となっていることがわかる．

次に，第3章で述べた

定理 3.1（算術平均と幾何平均の関係）

n 個の数 $a_1 > 0, a_2 > 0, \cdots\cdots, a_n > 0$ に対して

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots a_n} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n}{n}$$

であり，等号が成り立つのは $a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a_n$ のときに限る．

の拡張となっている定理を紹介する．

定理4.2（算術平均と幾何平均の関係の拡張）

$$\frac{1}{p_1} > 0, \frac{1}{p_2} > 0, \cdots\cdots, \frac{1}{p_n} > 0,\ \ \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$$

のとき，n 個の数 $a_1 > 0, a_2 > 0, \cdots\cdots, a_n > 0$ に対して，

$$a_1^{\frac{1}{p_1}} \cdot a_2^{\frac{1}{p_2}} \cdot \cdots \cdot a_n^{\frac{1}{p_n}} \leqq \frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \cdots + \frac{a_n}{p_n}$$

であり，等号が成り立つのは $a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a_n$ のときに限る．

（証明）

定理3.1の証明において，a が正の定数であるとき，$x > 0$ に対して

$$\log x \leqq \frac{1}{a} x + \log a - 1 \ \cdots\cdots(\sharp)$$

が成り立ち，等号成立は $x = a$ のときに限ることを示した．

さて，$(\sharp)$ において

$$a = \frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \cdots + \frac{a_n}{p_n}$$

とおくことにする．$(\sharp)$ の x にそれぞれ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ を代入すれば，次の n 個の不等式

$$\log a_1 \leqq \frac{1}{a} a_1 + \log a - 1 \ \cdots(1)$$

$$\log a_2 \leqq \frac{1}{a} a_2 + \log a - 1 \ \cdots(2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\log a_n \leqq \frac{1}{a} a_n + \log a - 1 \cdots(n)$$

が得られる．

不等式 (k) $(k = 1,2,\cdots,n)$ の両辺を $\frac{1}{p_k} > 0$ した不等式を考えると

$$\frac{1}{p_1} \cdot \log a_1 \leqq \frac{1}{p_1} \cdot \frac{1}{a} a_1 + \frac{1}{p_1} \cdot \log a - \frac{1}{p_1} \ \cdots(1')$$

$$\frac{1}{p_2} \cdot \log a_2 \leqq \frac{1}{p_2} \cdot \frac{1}{a} a_2 + \frac{1}{p_2} \cdot \log a - \frac{1}{p_2} \ \cdots(2')$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{p_n}\cdot\log a_n \leqq \frac{1}{p_n}\cdot\frac{1}{a}a_n+\frac{1}{p_n}\cdot\log a-\frac{1}{p_n}\cdots(n')$$

の両辺をそれぞれ加えると

$$\frac{1}{p_1}\cdot\log a_1+\cdots+\frac{1}{p_n}\cdot\log a_n \leqq \frac{1}{a}\left(\frac{a_1}{p_1}+\cdots+\frac{a_n}{p_n}\right)+\left(\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_n}\right)\log a-\left(\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_n}\right)$$

$$\log {a_1}^{\frac{1}{p_1}}+\cdots+\log {a_n}^{\frac{1}{p_n}} \leqq \frac{1}{a}\cdot a+1\cdot\log a-1$$

$$\log\left({a_1}^{\frac{1}{p_1}}\cdot\cdots\cdot {a_n}^{\frac{1}{p_n}}\right)\leqq\log\left(\frac{a_1}{p_1}+\cdots+\frac{a_n}{p_n}\right)$$

が得られる．関数$y=\log x$ は連続な狭義の単調増加関数であるから

$${a_1}^{\frac{1}{p_1}}\cdot\cdots\cdot {a_n}^{\frac{1}{p_n}}\leqq\frac{a_1}{p_1}+\cdots+\frac{a_n}{p_n}$$

が成り立つことが示される．

等号が成り立つのは

$$a_1=\frac{a_1}{p_1}+\frac{a_2}{p_2}+\cdots+\frac{a_n}{p_n},a_2=\frac{a_1}{p_1}+\frac{a_2}{p_2}+\cdots+\frac{a_n}{p_n},\cdots\cdots,a_n=\frac{a_1}{p_1}+\frac{a_2}{p_2}+\cdots+\frac{a_n}{p_n}$$

すなわち

$$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n$$

のときに限る．

（証明終）

定理4.2 において，$p_1=n,\ p_2=n,\cdots,p_n=n$ とすれば

$${a_1}^{\frac{1}{n}}\cdot{a_2}^{\frac{1}{n}}\cdot\cdots\cdot{a_n}^{\frac{1}{n}}\leqq\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n}+\cdots+\frac{a_n}{n}$$

すなわち

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

の形となるので，定理4.2は定理3.1の拡張となっていることがわかる．

5. おわりに

算術平均と幾何平均に関する不等式の証明方法は数多く知られている．対数関数を利用する他の方法もあり，関数方程式を利用する方法，数学的帰納法による証明，式の変形による証明，そしてロルの定理を利用する証明がある[1)]．

蛇足ではあるが，定理 2.2 の証明の中で用いた因数分解の公式

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

は，行列式

$$D=\begin{vmatrix}x & y & z\\ z & x & y\\ y & z & x\end{vmatrix}$$

を用いて導くことができる．まず，サラスの方法を使って計算すると

$$D = x^3 + y^3 + z^3 - xyz - xyz - xyz = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

であるが，一方

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x+y+x & y & z \\ x+y+z & x & y \\ x+y+z & z & x \end{vmatrix} \\
&= (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 1 & x & y \\ 1 & z & x \end{vmatrix} \\
&= (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 0 & x-y & y-z \\ 0 & z-y & x-z \end{vmatrix} \\
&= (x+y+z)\begin{vmatrix} x-y & y-z \\ z-y & x-z \end{vmatrix} \\
&= (x+y+z)\{(x-y)(x-z)-(y-z)(z-y)\} \\
&= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)
\end{aligned}$$

であることから因数分解の公式が成り立つことがわかる．

参考文献

1） 渡部隆一「不等式入門」森北出版，1969
2） 北山毅，松尾吉知，松下朝夫 共著「全問精解微積分演習」聖文社，1976