東海大学紀要情報通信学部
Vol.14,No.1,2021,pp.34-43

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 38）
〜 部分分数分解の計算例 〜

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.38
~ Examples of Calculations of Partial Fraction Decompositions ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on May. 28, 2021 & accepted on Aug. 3, 2021)

あらまし

微分積分をはじめとする解析学において，計算に重宝する方法の一つとして部分分数分解がある.この論文では部分分数分解の具体的な計算方法と不定積分および逆ラプラス変換の計算への応用を紹介することを目標とする.

Abstract

As a useful method of calculations in analysis, we give partial fraction decompositions. The purpose of this paper is to give an explanation of calculus for Partial Fraction Decomposition and to present an application to calculus for Indefinite Integral, Identity and **In**verse Laplace Transform..

キーワード：部分分数分解，逆ラプラス変換，不定積分，恒等式

Keywords: *Partial Fraction Decomposition, Inverse Laplace Transform, Indefinite Integral, Identity*

1. はじめに

有理関数の不定積分や逆ラプラス変換の計算などに，部分分数分解が用いられる.

例えば

$$\frac{3x^3+13x^2+16x-1}{(x+3)^2(x^2+4)}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{2x-1}{x^2+4}$$

と部分分数分解されることを利用すれば

$$\begin{aligned}\int\frac{3x^3+13x^2+16x-1}{(x+3)^2(x^2+4)}\,dx&=\int\left\{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{2x-1}{x^2+4}\right\}dx\\&=\int\left\{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{2x}{x^2+4}-\frac{1}{x^2+4}\right\}dx\\&=\int\left\{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{(x^2+4)'}{x^2+4}-\frac{1}{x^2+2^2}\right\}dx\\&=\log|x+3|+\frac{1}{x-3}+\log(x^2+4)-\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}+C\end{aligned}$$

と，不定積分が求められる.

また，同様にして

*1 スチューデントアチーブメントセンター
（高輪教養教育センター） 教授
Student Achievement Center
(Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus), Professor

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s^3+13s^2+16s-1}{(s+3)^2(s^2+4)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}-\frac{1}{(s+3)^2}+\frac{2s-1}{s^2+4}\right]$$
$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}-(-3)}-\frac{1}{\{\mathrm{s}-(-3)\}^2}+\frac{2s}{s^2+4}+\frac{-1}{s^2+4}\right]$$
$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}-(-3)}-\frac{1}{\{\mathrm{s}-(-3)\}^2}+2\cdot\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}^2+2^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\mathrm{s}^2+2^2}\right]$$
$$=e^{-3t}-te^{-3t}+2\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t$$

と，逆ラプラス変換の計算もできる．

ところが，部分分数分解の一般論，そして計算方法についての解説に十分な講義時間を割くことが出来ないのが現状ではないだろうか. 本論文では, 部分分数分解の具体的な計算例, そして不定積分と逆ラプラス変換への応用について述べる [1)2)].

2. 部分分数分解の計算例

定理（部分分数分解）

有理関数

$$\frac{f(x)}{g(x)}\quad(\deg f<\deg g)$$

において

$$g(x)=(x-a)^k\cdots(x-c)^l\,(x^2+vx+w)^s\cdots(x^2+px+q)^u$$
$$(a\,,\cdots\,,c\,,v\,,w\,,\cdots\,,p\,,q\in\mathbb{R}\,;\;v^2-4w<0\,,\cdots\,,p^2-4q<0)$$

となっているならば

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}+\cdots\cdots+\frac{C_1}{x-c}+\frac{C_2}{(x-c)^2}+\cdots+\frac{C_k}{(x-c)^l}$$
$$+\frac{V_1x+W_1}{x^2+vx+w}+\cdots+\frac{V_sx+W_s}{(x^2+ux+w)^s}+\cdots\cdots+\frac{P_1x+Q_1}{x^2+px+q}+\cdots+\frac{P_ux+Q_u}{(x^2+px+q)^u}$$
$$(\,A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots,C_1,C_2,\cdots C_l,V_1,W_1,\cdots V_s,W_s,\cdots,P_1,Q_1,\cdots P_u,Q_u\in\mathbb{R}\,)$$

と表される.

『重要』　部分分数分解によって導かれる式は，恒等式である.

例題

次の分数式を，部分分数分解せよ．

(1) $\dfrac{x+9}{(x-3)(x+1)}$

(2) $\dfrac{12}{(x+1)(x-2)(x-3)}$

(3) $\dfrac{4x+12}{x(x+2)^2}$

(4) $\dfrac{x^2}{(x-1)^3}$

(5) $\dfrac{x^2-7x-6}{(x-3)(x^2+2x+3)}$

（解答）

(1)

$$\frac{x+9}{(x-3)(x+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1}\cdots(*)$$

となるような定数 A,B の値を求める．

$(*)$ の両辺に $x-3$ をかけると

$$\frac{x+9}{x+1}=A+\frac{B}{x+1}\cdot(x-3)\cdots①$$

となるが，これはx についての恒等式でありxにどのような数を代入しても成り立つ．

①の両辺に$x=3$ を代入すると

$$\frac{3+9}{3+1}=A\Leftrightarrow A=3$$

が得られる．$(*)$ の両辺に $x+1$ をかけると

$$\frac{x+9}{x-3}=\frac{A}{x-3}\cdot(x+1)+B\cdots②$$

となるが，これはx についての恒等式でありxにどのような数を代入しても成り立つ．

②の両辺に$x=-1$ を代入すると

$$\frac{-1+9}{-1-3}=B\Leftrightarrow B=-2$$

が得られる．したがって

$$\frac{x+9}{(x-3)(x+1)}=\frac{3}{x-3}+\frac{-2}{x+1}$$

となる．

（不定積分の計算への応用）

$$\int\frac{1}{t}dt=\log|t|+C$$

に留意しておく．

$$\int \frac{x+9}{(x-3)(x+1)}dx = \int \left(\frac{3}{x-3} + \frac{-2}{x+1}\right)dx$$
$$= 3\log|x-3| - 2\log|x+1| + C$$
$$= \log\frac{|x-3|^3}{(x+1)^2} + C$$

（逆ラプラス変換の計算への応用）

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$$

に留意しておく．

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+9}{(s-3)(s+1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s-3} + \frac{-2}{s+1}\right]$$
$$= 3e^{3t} - 2e^{-t}$$

(2)

$$\frac{12}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \cdots (*)$$

となるような定数 A, B, C の値を求める．

$(*)$ の両辺に $x+1$ をかけると

$$\frac{12}{(x-2)(x-3)} = A + \frac{B}{x-2}\cdot(x+1) + \frac{C}{x-3}\cdot(x+1) \cdots ①$$

となるが，これはx についての恒等式でありxにどのような数を代入しても成り立つ．

①の両辺に$x=-1$ を代入すると

$$\frac{12}{(-1-2)(-1-3)} = A \Leftrightarrow A = 1$$

が得られる．$(*)$ の両辺に $x-2$ をかけると

$$\frac{12}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1}\cdot(x-2) + B + \frac{C}{x-3}\cdot(x-2) \cdots ②$$

となるが，これはx についての恒等式でありxにどのような数を代入しても成り立つ．

②の両辺に$x=2$ を代入すると

$$\frac{12}{(2+1)(2-3)} = B \Leftrightarrow B = -4$$

が得られる．$(*)$ の両辺に $x-3$ をかけると

$$\frac{12}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1}\cdot(x-3) + \frac{B}{x-2}\cdot(x-3) + C \cdots ③$$

となるが，これはx についての恒等式でありxにどのような数を代入しても成り立つ．

③の両辺に$x=3$ を代入すると

$$\frac{12}{(3+1)(3-2)}=C \Leftrightarrow C=3$$

が得られる．

したがって

$$\frac{12}{(x+1)(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x+1}+\frac{-4}{x-2}+\frac{3}{x-3}$$

となる．

（不定積分の計算への応用）

$$\int \frac{1}{t}dt=\log|t|+C$$

に留意しておく．

$$\begin{aligned}\int \frac{12}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx &= \int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-4}{x-2}+\frac{3}{x-3}\right)dx \\ &= \log|x+1|-4\log|x-2|+3\log|x-3|+C \\ &= \log\frac{|x+1||x-3|^3}{(x-2)^4}+C\end{aligned}$$

（逆ラプラス変換の計算への応用）

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at}$$

に留意しておく．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{12}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}+\frac{-4}{s-2}+\frac{3}{s-3}\right] \\ &= e^{-t}-4e^{2t}+3e^{3t}\end{aligned}$$

(3)

$$\frac{4x+12}{x(x+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}\cdots(*)$$

となるような定数 A,B,C の値を求める．

$(*)$ の両辺に x をかけると

$$\frac{4x+12}{(x+2)^2}=A+\frac{B}{x+2}\cdot x+\frac{C}{(x+2)^2}\cdot x\cdots ①$$

となるが，これはx についての恒等式でありxにどのような数を代入しても成り立つ．

①の両辺に$x=0$ を代入すると

$$\frac{12}{2^2}=A \Leftrightarrow A=3$$

が得られる．$(*)$ の両辺に $(x+2)^2$ をかけると

$$\frac{4x+12}{x}=\frac{A}{x}\cdot(x+2)^2+B(x+2)+C\cdots②$$

となるが，これはx についての恒等式でありxにどのような数を代入しても成り立つ．

②の両辺に$x=-2$ を代入すると

$$\frac{-8+12}{-2}=C\Leftrightarrow C=-2$$

が得られる．

②の両辺をxについて微分する．ここで

$$\frac{4x+12}{x}=\frac{4x}{x}+\frac{12}{x}=4+\frac{12}{x}$$

に留意しておくと

$$-\frac{12}{x^2}=\frac{A(x+2)(x-2)}{x^2}+B\cdots③$$

となるが，これはx についての恒等式でありxにどのような数を代入しても成り立つ．

③の両辺に$x=-2$ を代入すると

$$-\frac{12}{4}=B\Leftrightarrow B=-3$$

が得られる．したがって

$$\frac{4x+12}{x(x+2)^2}=\frac{3}{x}+\frac{-3}{x+2}+\frac{-2}{(x+2)^2}$$

となる．

（不定積分の計算への応用）

$$\int\frac{1}{t}dt=\log|t|+C\,,\quad \int\frac{1}{t^2}dt=-\frac{1}{t}+C$$

に留意しておく．

$$\begin{aligned}\int\frac{4x+12}{x(x+2)^2}dx&=\int\left\{\frac{3}{x}+\frac{-3}{x+2}+\frac{-2}{(x+2)^2}\right\}dx\\&=3\log|x|-3\log|x+2|-2\cdot\left(-\frac{1}{x+2}\right)+C\\&=\log\left|\frac{x}{x+2}\right|^3+\frac{2}{x+2}+C\end{aligned}$$

（逆ラプラス変換の計算への応用）

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1\,,\quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at}\,,\quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^2}\right]=te^{at}$$

に留意しておく．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4s+12}{s(s+2)^2}\right]&=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s}+\frac{-3}{s+2}+\frac{-2}{(s+2)^2}\right]\\&=3-3e^{-2t}-2te^{-2t}\end{aligned}$$

(4)

$$\frac{x^2}{(x-1)^3}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{(s-1)^2}+\frac{C}{(s-1)^3} \qquad (A,B,C\text{ は定数})$$

となるような定数 A,B,C の値を求める.

最初に，分子のx^2 を $a(x-1)^2+b(x-1)+c$ $(a,b,c$ は定数$)$の形に変形することを考える.

$x-1=X$ すなわち $x=X+1$ とおけば

$$x^2=(X+1)^2=X^2+2X+1=(x-1)^2+2(x-1)+1$$

であることがわかる．したがって

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{(x-1)^3}&=\frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{(x-1)^3}\\&=\frac{(x-1)^2}{(x-1)^3}+\frac{2(x-1)}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^3}\\&=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}\end{aligned}$$

となる.

（不定積分の計算への応用）

$$\int\frac{1}{t}dt=\log|t|+C,\quad \int\frac{1}{t^2}dt=-\frac{1}{t}+C\,,\quad \int\frac{1}{t^3}dt=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}+C$$

に留意しておく.

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{(x-1)^3}dx&=\int\left\{\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}\right\}dx\\&=\log|x-1|+2\left(-\frac{1}{x-1}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}+C\\&=\log|x-1|-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}+C\end{aligned}$$

（逆ラプラス変換の計算への応用）

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at}\,,\quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^2}\right]=te^{at}\,,\quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)^3}\right]=\frac{1}{2}t^2e^{at}$$

に留意しておく.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2}{(s-1)^3}\right]&=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}+\frac{2}{(s-1)^2}+\frac{1}{(s-1)^3}\right]\\&=e^t+2te^t+\frac{1}{2}t^2e^t\end{aligned}$$

(5)

$$\frac{x^2-7x-6}{(x-3)(x^2+2x+3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+3}$$

となるような定数A, B, C の値を求める．両辺に$(x-3)(x^2+2x+3)$ をかける．

$$x^2-7x-6=A(x^2+2x+3)+(Bx+C)(x-3) \cdots (*)$$

$(*)$はx についての恒等式であり，両辺のx にどのような値を代入しても成り立つ．

$(*)$の両辺に$x=3$ を代入すると$9-21-6=A(9+6+3) \Leftrightarrow -18=18A \Leftrightarrow A=-1$ が得られる．

すると，$(*)$は

$$x^2-7x-6=-(x^2+2x+3)+(Bx+C)(x-3)$$

$$x^2-7x-6=-(x^2+2x+3)+Bx^2+(-3B+C)x-3C$$

$$1x^2-7x-6=(B-1)x^2+(-3B+C-2)x+(-3C-3) \cdots (**)$$

となる．$(**)$はx についての恒等式であるから，両辺の係数を比較する．

$(**)$の x^2 の項が等しいから，$1=B-1$ ．

$(**)$の xの項が等しいから，$-7=-3B+C-2$ ．

$(**)$の定数項が等しいから，$-6=-3C-3$ ．

よって，$B=2,\ C=1$ が得られる．したがって

$$\frac{x^2-7x-6}{(x-3)(x^2+2x+3)}=\frac{-1}{x-3}+\frac{2x+1}{x^2+2x+3}$$

となる．

（不定積分の計算への応用）

$$\int \frac{1}{t}\,dt=\log|t|+C, \quad \int \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt=\log|f(t)|+C\,, \quad \int \frac{1}{t^2+a^2}\,dt=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{t}{a}+C$$

に留意しておく．

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2-7x-6}{(x-3)(x^2+2x+3)}\,dx &= \int\left(\frac{-1}{x-3}+\frac{2x+1}{x^2+2x+3}\right)dx \\
&= \int\left(\frac{-1}{x-3}+\frac{2x+2}{x^2+2x+3}+\frac{-1}{x^2+2x+3}\right)dx \\
&= \int\left\{\frac{-1}{x-3}+\frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3}+\frac{-1}{(x+1)^2+2}\right\}dx \\
&= \int\left\{\frac{-1}{x-3}+\frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3}-\frac{1}{(x+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\right\}dx \\
&= -\log|x-3|+\log(x^2+2x+3)-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C \\
&= \log\frac{x^2+2x+3}{|x-3|}-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C
\end{aligned}$$

（逆ラプラス変換の計算への応用）

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at},\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}\right]=e^{at}\cos\omega t,\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}\right]=e^{at}\sin\omega t\ \ (a,\omega\text{ は定数})$$

に留意しておく．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2-7s-6}{(s-3)(s^2+2s+3)}\right]&=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s-3}+\frac{2s+1}{s^2+2s+3}\right]\\&=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s-3}+\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+2}+\frac{-1}{(s+1)^2+2}\right]\\&=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s-3}+2\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(s+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\right]\\&=-e^{3t}+2e^{-t}\cos\sqrt{2}\ t-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\sin\sqrt{2}\ t\end{aligned}$$

参考文献

1）貴田研司，“大学初年次における数学教材の提案（その21）～部分分数分解～，”東海大学紀要情報通信学部，Vol. 11, No. 2, 2018, pp49-60

2）矢野健太郎，石原繁 編「微分積分　改訂版」裳華房，1991

3）矢野健太郎「数学入門」森北出版，1968

付録 1

【補足説明】恒等式とは何か？（方程式とは異なるものである）[3)]

x についての 2 次方程式$x^2-5x+6=0$ を解くと$(x-2)(x-3)=0$ により，解は，$x=2,\ 3$ と求められる．このことの意味は$x^2-5x+6=0$ が成り立つのは$x=2,3$ のときのみであり，x が他の数の場合には成り立たないということである．

このように，含まれている文字に特別な数を代入したときにだけ成り立つ等式のことを，方程式という．

一方，$(x+3)(x-3)$を展開すると$(x+3)(x-3)=x^2-9\cdots$ ① が得られる．分数式

$$\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+2}$$

を計算すると

$$\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x-3}\cdot\frac{x+2}{x+2}+\frac{1}{x+2}\cdot\frac{x-3}{x-3}=\frac{(x+2)+(x-3)}{(x-3)(x+2)}=\frac{2x-1}{(x-3)(x+2)}$$

であるから

$$\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+2}=\frac{2x-1}{(x-3)(x+2)}\cdots②$$

が得られる．上記の①,②の式

$$(x+3)(x-3)=x^2-9,\qquad \frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}=\frac{2x-1}{(x-3)(x+2)}$$

のように，含まれている文字（上式ではx ）にどのような数を代入しても成り立つ等式を恒等式という．

式の展開や因数分解の公式における公式のように，式の変形によって導かれる式は恒等式である．

例１（１次式について）

(1)　$ax+b=a'x+b'$ が x についての恒等式である．　$\Leftrightarrow$　$a=a', b=b'$

(2)　$ax+b=0$ が x についての恒等式である．　$\Leftrightarrow$　$a=0, b=0$

例２（２次式について）

(1)　$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式である．　$\Leftrightarrow$　$a=a', b=b', c=c'$

(2)　$ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式である．　$\Leftrightarrow$　$a=0, b=0, c=0$