東海大学紀要情報通信学部
Vol.14,No.2,2021,pp.15-23

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 40）
～ 行列の分割 ～

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.40
~ Partitioned Matrices ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on Nov. 26, 2021 & accepted on Jan. 11, 2022)

あらまし

本論文においては線形代数に関する話題として，特に分割表示された行列について乗法，行列式，逆行列がどのようになるかを述べる．

Abstract

In this paper, we give explanation of items for linear algebra. We present specially multiplications, determinants, and invers matrices of partitioned matrices.

キーワード：行列の分割，乗法，行列式，逆行列

Keywords: *Matrix Partitioning***,** *Multiplication, Determinant, Inverse Matrix*

1. はじめに

大学初年次で学ぶ線形代数において，行列と行列式についての計算に習熟することは学習の第一段階である．分割（ブロック表示）された行列の積について，次のことが知られている．

定理

A, B がそれぞれ(m, n) 型行列，(n, l) 型行列であるとき次の形に分割する．

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{q1} & \cdots & B_{qr} \end{pmatrix}\cdots(*)$$

ただし，A_{ij} は(m_i, n_j) 型行列，B_{jk} は(n_j, l_k) 型行列，そして

$$m_1+\cdots+m_p=m,\quad n_1+\cdots+n_q=n,\quad l_1+\cdots+l_r=l$$

としておく．

2 つの行列の積について

$$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{p1} & \cdots & C_{pr} \end{pmatrix}\cdots(**)$$

が成り立つ．ただし

*1 スチューデントアチーブメントセンター
（高輪教養教育センター） 教授
Student Achievement Center
(Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus)，Professor

$$C_{ik} = A_{i1}B_{1k} + \cdots + A_{iq}B_{qk} \qquad (i = 1, \cdots, p\ ;\ k = 1, \cdots, r)$$

である．□

この定理の詳しい証明を述べてから，行列式および逆行列の計算への応用について解説する．

本論文の執筆にあたって，横山雄一「線形代数」[1]が大いに役に立った．その他にも多くの好著を参考にさせていただいた[2][3][4][5][6][7]．

2. 行列の分割

行列を扱う場合に，行列をいくつかの縦線と横線で分割して考えると便利なことがある．例えば

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & \vdots & -5 \\ 3 & -6 & 5 & \vdots & 12 \\ -7 & 0 & 4 & \vdots & 8 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 5 & -1 & -3 & \vdots & -9 \end{pmatrix}$$

このとき，分けられた各ブロックを小行列という．ここで

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 3 & -6 & 5 \\ -7 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ A_{12} = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix},\ A_{21} = (5 \quad -1 \quad -3),\ A_{22} = (-9)$$

とおけば

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

と表示される．

3. 分割された行列の積

定理 3. 1

A, B がそれぞれ(m, n) 型行列，(n, l) 型行列であるとき次の形に分割する．

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{q1} & \cdots & B_{qr} \end{pmatrix} \cdots (*)$$

ただし，A_{ij} は(m_i, n_j) 型行列，B_{jk} は(n_j, l_k) 型行列，そして

$$m_1 + \cdots + m_p = m, \quad n_1 + \cdots + n_q = n, \quad l_1 + \cdots + l_r = l$$

としておく．

2 つの行列の積について

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{p1} & \cdots & C_{pr} \end{pmatrix} \cdots (**)$$

が成り立つ．

ただし

$$C_{ik} = A_{i1}B_{1k} + \cdots + A_{iq}B_{qk} \qquad (i = 1, \cdots, p\ ;\ k = 1, \cdots, r)$$

である．□

（証明）

(1) $p = 1,\ q = 1$ の場合

A は分割されず，$B = (B_1, \quad \cdots \quad , B_r)$の形となる．

ここで改めてB の列ベクトルを$b_s\ \ (s = 1, \cdots, l)$とおけば

$$B = (b_1, \quad \cdots \quad , b_l)$$

と表され

$$AB = A(b_1, \quad \cdots \quad , b_l) = (Ab_1, \quad \cdots \quad , Ab_l)$$

となることに留意すれば

$$AB = (AB_1, \quad \cdots \quad , AB_r)$$

が示される．

(2) $q = 1,\ r = 1$ の場合

Bは分割されず

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix}$$

の形となる．

ここで改めてA の行ベクトルを$a_t\ \ (t = 1, \cdots, m)$とおけば

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

と表され

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} a_1 B \\ \vdots \\ a_m B \end{pmatrix}$$

となることに留意すれば

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_p B \end{pmatrix}$$

が示される．

(3) $p = 1,\ r = 1$ の場合

$$A = (A_1, \quad \cdots \quad , A_q), \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_q \end{pmatrix}$$

の形となる．ただし，A_uは$(m,\ n_u)$型行列，B_uは$(n_u,\ l)$型行列で，$n_1 + \cdots + n_q = n$とする．

A, B の，第 i ブロックをそのままにして，他のブロックのすべてを零行列で置き換えた行列を $A^{(i)}$，$B^{(i)}$ とおく，すなわち

$$A^{(i)} = (0, \cdots, 0, A_i, 0, \cdots, 0), \quad B^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (i = 1, \cdots, q)$$

とおけば

$$A = A^{(1)} + \cdots + A^{(q)}, \quad B = B^{(1)} + \cdots + B^{(q)}$$

であり

$$A^{(j)}B^{(k)} = \begin{cases} A_j B_j & (j = k) \\ 0_{m,l} & (j \neq k) \end{cases}$$

が成り立つ．

したがって

$$AB = \left(A^{(1)} + \cdots + A^{(q)}\right)\left(B^{(1)} + \cdots + B^{(q)}\right) = A^{(1)}B^{(1)} + \cdots + A^{(q)}B^{(q)} = A_1B_1 + \cdots + A_qB_q$$

が得られる．

(4) 一般の場合

$(*)$ において，改めて

$$A_i = (A_{i1}, \quad \cdots \quad, A_{iq}), \quad B_k = \begin{pmatrix} B_{1k} \\ \vdots \\ B_{qk} \end{pmatrix} \qquad (i = 1, \cdots, p \;;\; k = 1, \cdots r)$$

とおけば

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix}, \quad B = (B_1, \cdots, B_r)$$

となる．

(1), (2) の結果を用いると

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_1B \\ \vdots \\ A_pB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(B_1, \cdots, B_r) \\ \vdots \\ A_p(B_1, \cdots, B_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1, \cdots, A_1B_r \\ \vdots \\ A_pB_1, \cdots, A_pB_r \end{pmatrix}$$

となる．さらに (3) の結果を用いると

$$A_iB_k = A_{i1}B_{1k} + \cdots + A_{iq}B_{qk} = C_{ik}$$

となり，(**) が示された．

（証明終）

4. 分割された行列の行列式

まず，2 つの補助定理を準備する．そのために予め

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$ {}^tA=\begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{pmatrix},\quad {}^tB=\begin{pmatrix} b_1 & b_3 & b_5 \\ b_2 & b_4 & b_6 \end{pmatrix},\quad {}^tC=\begin{pmatrix} c_1 & c_4 \\ c_2 & c_5 \\ c_3 & c_6 \end{pmatrix},\quad {}^tD=\begin{pmatrix} d_1 & d_3 \\ d_2 & d_4 \end{pmatrix} $$

となることを述べておく.

例えば，行列の転置について

$$ {}^t\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 \\ a_4 & a_5 & a_6 & b_3 & b_4 \\ a_7 & a_8 & a_9 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & d_1 & d_2 \\ c_4 & c_5 & c_6 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_7 & c_1 & c_4 \\ a_2 & a_5 & a_8 & c_2 & c_5 \\ a_3 & a_6 & a_9 & c_3 & c_6 \\ b_1 & b_3 & b_5 & d_1 & d_3 \\ b_2 & b_4 & b_6 & d_2 & d_4 \end{pmatrix} $$

となるが，上式を書き換えれば

$$ {}^t\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix} \cdots\cdots ① $$

が成り立っていることがわかる.

一方，行列式について，展開を行うと

$$ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 \\ a_4 & a_5 & a_6 & b_3 & b_4 \\ a_7 & a_8 & a_9 & b_5 & b_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 \\ a_4 & a_5 & a_6 & b_3 \\ a_7 & a_8 & a_9 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} \cdots\cdots ②, $$

$$ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & b_5 & b_6 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & b_3 & b_4 \\ 0 & 1 & b_5 & b_6 \\ 0 & 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b_5 & b_6 \\ 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix} \cdots\cdots ③ $$

が成り立ち，上式を書き換えると

$$ \begin{vmatrix} A & B \\ 0_{2,3} & E_2 \end{vmatrix} = |A| \cdots\cdots ②, \qquad \begin{vmatrix} E_3 & B \\ 0_{2,3} & D \end{vmatrix} = |D| \cdots\cdots ③ $$

が成り立つことがわかる.

①，②，③を一般化すれば，次の 2 つの結果が得られる.

補助定理１

Aをr 次行列，Bを(r,s)型行列， C を(s,r)型行列，Dをs 次行列とすれば

$$ {}^t\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix} $$

が成り立つ.

補助定理２

A をr 次行列，B を(r,s)型行列， C を(s,r)型行列，D をs 次行列とすれば

(1) $$ \begin{vmatrix} A & B \\ 0_{s,r} & E_s \end{vmatrix} = |A| $$

(2) $$ \begin{vmatrix} A & 0_{r,s} \\ C & E_s \end{vmatrix} = |A| $$

(3) $$ \begin{vmatrix} E_r & B \\ 0_{s,r} & D \end{vmatrix} = |D| $$

(4) $\begin{vmatrix} E_r & 0_{r,s} \\ C & D \end{vmatrix} = |D|$

が成り立つ．

定理 4. 1

A をr 次行列，B を(r,s)型行列，C を(s,r)型行列，D をs 次行列とすれば

(1) $\begin{vmatrix} A & B \\ 0_{s,r} & D \end{vmatrix} = |A||D|$

(2) $\begin{vmatrix} A & 0_{r,s} \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$

が成り立つ．

（証明）

(1)例えば

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{s,r} & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & B \\ 0_{s,r} & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0_{r,s} \\ 0_{s,r} & E_s \end{pmatrix}$$

が成り立つ．両辺の行列式をとると

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0_{s,r} & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_r & B \\ 0_{s,r} & D \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & 0_{r,s} \\ 0_{s,r} & E_s \end{vmatrix}$$

となるが，補助定理２により

$$\begin{vmatrix} E_r & B \\ 0_{s,r} & D \end{vmatrix} = |D|, \quad \begin{vmatrix} A & 0_{r,s} \\ 0_{s,r} & E_s \end{vmatrix} = |A|$$

であるから

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0_{s,r} & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

が得られる．

(2)　補助定理１により

$${}^t\begin{pmatrix} A & 0_{r,s} \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^t0_{r,s} & {}^tD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ 0_{s,r} & {}^tD \end{pmatrix}$$

となる．

転置しても行列式の値は変わらないことと，(1)の結果を用いると

$$\begin{vmatrix} A & 0_{r,s} \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^tA & {}^tC \\ 0_{s,r} & {}^tD \end{vmatrix} = |{}^tA||{}^tD| = |A||D|$$

が得られる．

（証明終）

例題 4. 1

A, B がn 次行列のとき

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A-B||A+B|$$

が成り立つ．特に，$AB = BA$ を満たしているならば

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A^2 - B^2|$$

となる．

（証明）

定理 3. 1 を用いると

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ B+A & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ 0_n & A-B \end{vmatrix} = |A-B||A+B|$$

が示される．

特に，$AB = BA$ であるならば

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A-B||A+B| = |(A-B)(A+B)| = |A^2+AB-BA-B^2| = |A^2-B^2|$$

が成り立つ．

（証明終）

例題 4. 2

A を r 次行列，B を (r,s) 型行列，C を (s,r) 型行列，D を s 次行列としておく．

(1)　A が正則行列であるならば

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D-CA^{-1}B|$$

が成り立つ．

(2)　D が正則行列であるならば

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A-BD^{-1}C||D|$$

が成り立つ．

（証明）

(1)

$$\begin{pmatrix} E_r & 0_{r,s} \\ -CA^{-1} & E_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{s,r} & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

の両辺の行列式について，定理 3. 1 を用いると

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D-CA^{-1}B|$$

が得られる．

(2)

$$\begin{pmatrix} E_r & -BD^{-1} \\ 0_{s,r} & E_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & 0_{r,s} \\ C & D \end{pmatrix}$$

の両辺の行列式について，定理 3. 1 を用いると

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A-BD^{-1}C||D|$$

が得られる．

（証明終）

5. 逆行列の計算への応用

例題 5. 1

A を r 次正則行列，B を (r,s) 型行列，C を (s,r) 型行列，D を s 次正則行列としておく．

(1)　$P=\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{s,r} & D \end{pmatrix}$が正則行列であることを示し，その逆行列$P^{-1}$を求めよ．

(2)　$Q=\begin{pmatrix} A & 0_{r,s} \\ C & D \end{pmatrix}$が正則行列であることを示し，その逆行列$P^{-1}$を求めよ．

（解答）

(1)

定理 4.1(1)により

$$|P|=\begin{vmatrix} A & B \\ 0_{s,r} & D \end{vmatrix}=|A||D|\neq 0$$

であるから，P は正則行列である．

P の逆行列を$X=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$（ただし，$X_1$ はr 次行列，X_2 は(r,s)型行列，X_3 を(s,r)型行列，X_4はs 次行列）とおけば

$$PX=\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{s,r} & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AX_1+BX_3 & AX_2+BX_4 \\ DX_3 & DX_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_r & 0_{r,s} \\ 0_{s,r} & E_s \end{pmatrix}$$

により

$$AX_1+BX_3=E_r\cdots ①$$
$$AX_2+BX_4=0_{r,s}\cdots ②$$
$$DX_3=0_{s,r}\cdots ③$$
$$DX_4=E_s\cdots ④$$

である．D は正則行列であるから，③より$X_3=0_{s,r}\cdots$⑤，④より$X_4=D^{-1}\cdots$⑥が得られる．

ここで，①に⑤を代入すると，$AX_1=E_r$となるが，A は正則行列であるから，$X_1=A^{-1}\cdots$⑦となる．

また，②に⑥を代入すると，$AX_2+BD^{-1}=0_{r,s}$ だから，$AX_2=-BD^{-1}$ となるが，A は正則行列であるから，

$X_2=-A^{-1}\cdot B\cdot D^{-1}\cdots$⑧が得られる．　したがって

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}\cdot B\cdot D^{-1} \\ 0_{s,r} & D^{-1} \end{pmatrix}$$

である．

(2)

定理 4.1(2)により

$$|Q|=\begin{vmatrix} A & 0_{r,s} \\ C & D \end{vmatrix}=|A||D|\neq 0$$

であるから，Q は正則行列である．

M がn 次正則行列であるとき$({}^tM)^{-1}={}^t(M^{-1})$が成り立つとに留意されたい．

さて，補助定理 1 により

$${}^tQ={}^t\begin{pmatrix} A & 0_{r,s} \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^t0_{r,s} & {}^tD \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ 0_{s,r} & {}^tD \end{pmatrix}$$

であるが，(1)の結果を利用すると

$$
\begin{aligned}
({}^tQ)^{-1} &= \begin{pmatrix} ({}^tA)^{-1} & -({}^tA)^{-1}\cdot {}^tC\cdot ({}^tD)^{-1} \\ 0_{s,r} & ({}^tD)^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} {}^t(A^{-1}) & -{}^t(A^{-1})\cdot {}^tC\cdot {}^t(D^{-1}) \\ 0_{s,r} & {}^t(D^{-1}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} {}^t(A^{-1}) & -{}^t(D^{-1}\cdot C\cdot A^{-1}) \\ 0_{s,r} & {}^t(D^{-1}) \end{pmatrix} \\
&= {}^t(Q^{-1})
\end{aligned}
$$

となる．すると，補助定理 1 により

$$
\begin{aligned}
Q^{-1} &= {}^t\{{}^t(Q^{-1})\} \\
&= {}^t\begin{pmatrix} {}^t(A^{-1}) & -{}^t(D^{-1}\cdot C\cdot A^{-1}) \\ 0_{s,r} & {}^t(D^{-1}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} {}^t\{{}^t(A^{-1})\} & {}^t0_{s,r} \\ {}^t\{-{}^t(D^{-1}\cdot C\cdot A^{-1})\} & {}^t\{{}^t(D^{-1})\} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^{-1} & 0_{r,s} \\ -D^{-1}\cdot C\cdot A^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

が得られる．

（解答終）

参考文献

1） 横山雄一「線形代数学」昭晃堂，1975
2） 川久保勝夫「線形代数学」日本評論社，1999
3） 硲野俊博，加藤芳文 共著「理工系の基礎線形代数学」学術図書，1994
4） 硲野俊博，山田浩，山辺元雄 共著「理工系の演習線形代数学」学術図書，2001
5） 服部昭「線型代数学」朝倉書店，1982
6） 小寺平治「明解演習線形代数」共立出版，1982
7） 富永晃「基礎演習 線形代数」聖文社，1975