東海大学紀要情報通信学部
Vol.14,No.2,2021,pp.34-42

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 42）
～ 直交補空間 ～

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.42
~ Orthogonal Complements ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on Nov. 26, 2021 & accepted on Jan. 11, 2022)

あらまし
本論文においては線形代数に関する話題として，計量線形空間（内積空間）における，直交補空間と正射影（射影子）について述べる．

Abstract
In this paper, we give explanation of items for linear algebra. We present specially orthogonal complements and orthogonal projections for metric linear spaces.

キーワード : 直交補空間，計量線形空間，正規直交基底，正射影
Keywords: *Orthogonal Complement, Metric Linear Space, Orthonormal Basis, Orthogonal Projection*

1. はじめに

大学初年次に学ぶ線形代数において，計量線形空間（内積空間）の概念の理解について習熟することが大切である．ここでは特に直交補空間について詳しく解説する．V が有限次元計量線形空間，WをVの部分空間とすれば

(1) $V = W \oplus W^{\perp}$

(2) $\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$

(3) $(W^{\perp})^{\perp} = W$

ただし，$W^{\perp}$で部分空間 Wの直交補空間，$\oplus$で 2 つの部分空間の直和，$\dim$で線形空間の次元を表す．
が成り立つことを示すことは，特に重要であると考える．
また，4 つの基本部分空間と呼ばれる

1. A の行空間 $\mathcal{R}({}^tA)$,
2. A の零行空間 $\mathcal{N}(A)$,
3. A の列空間 $\mathcal{R}(A)$,
4. A の左零空間 $\mathcal{N}\left({}^tA\right)$,

ただし，実数を成分とする行列Aに対して，転置行列を${}^tA$と表す．
について述べることは，本論文の一つの特徴である．

*1 スチューデントアチーブメントセンター
（高輪教養教育センター） 教授
Student Achievement Center
(Liberal Arts Education Center, Takanawa Campus)，Professor

また，執筆にあたって数多くの好著を参考にさせていただいた[1)2)3)4)5)6)7)8)9)10)]．

2. 内積とノルム

内積(,)の定義された計量線形空間Vのベクトル$\boldsymbol{a}$に対して

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$$

を，ベクトルの長さまたはノルムという．また

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$$

のとき，$\boldsymbol{a}$ と$\boldsymbol{b}$ は直交するという．

$\boldsymbol{0}$ でないベクトル$\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_r}$のどの２つも直交しているとき，すなわち

$$(\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_j}) = 0 \qquad (i \neq j, \quad i, j = 1, \cdots, r)$$

が成り立つとき，$\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_r}$ は直交系であるという．

$\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_r}$ がすべて単位ベクトルであり，しかも直交系であるとき，すなわち

$$(\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_j}) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

が成り立つとき$\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_r}$ は，正規直交系であるという．

また，V の基底$\{\boldsymbol{u_1}, \cdots, \boldsymbol{u_n}\}$が正規直交系であるとき，この基底を$V$ の正規直交基底という．

定理 2.1（グラム・シュミットの正規直交化法）

内積(,)をもつ計量線形空間 Vにおいて，1 次独立なベクトルの系$\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_r}$ が与えられたとき

$$\boldsymbol{v_1} = \frac{\boldsymbol{u_1}}{\|\boldsymbol{u_1}\|}, \quad \boldsymbol{u_1} = \boldsymbol{a_1}$$
$$\boldsymbol{v_2} = \frac{\boldsymbol{u_2}}{\|\boldsymbol{u_2}\|}, \quad \boldsymbol{u_2} = \boldsymbol{a_2} - (\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{v_1})\boldsymbol{v_1}$$
$$\boldsymbol{v_3} = \frac{\boldsymbol{u_3}}{\|\boldsymbol{u_3}\|}, \quad \boldsymbol{u_3} = \boldsymbol{a_3} - (\boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{v_1})\boldsymbol{v_1} - (\boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{v_2})\boldsymbol{v_2}$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{v_r} = \frac{\boldsymbol{u_r}}{\|\boldsymbol{u_r}\|}, \quad \boldsymbol{u_r} = \boldsymbol{a_r} - (\boldsymbol{a_r}, \boldsymbol{v_1})\boldsymbol{v_1} - \cdots - (\boldsymbol{a_r}, \boldsymbol{v_{r-1}})\boldsymbol{v_{r-1}}$$

として，正規直交系$\{\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_r}\}$を作ることができる．

定理 2.2

V がn 次元計量線形空間であり，$\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_r}$を$V$ の正規直交系とすれば，これを拡大した Vの正規直基底$\{\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_n}\}$が存在する．

定義（直和）

線形空間Vとその部分空間U,Wに対して，の任意のベクトル$\boldsymbol{v}$が

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w} \qquad (\boldsymbol{u}\in U, \boldsymbol{w}\in W)$$

と表されて，その表し方が一意的であるならば，VをUとWの直和であるといい，$U\bigoplus W$ と書く．

定理 2.3（直和）

線形空間Vとその部分空間U,Wに対して，次の(1)，(2)が成り立つ．

(1) $V=U\bigoplus W \Leftrightarrow V=U+W$，$U\cap W=\{0\}$.

(2) Vが有限次元線形空間で$V=U\bigoplus W$のとき$\dim V=\dim U+\dim W$.

3. 直交補空間

3.1 直交部分空間[11)]

定義（直交部分空間）

計量線形空間 Vの部分空間 U, W について，U とW の任意のベクトルが互いに直交するとき，U, W は直交するといって，$U\perp W$ と表す．

これから，線形写像についての

定理 3.1.1

V,V' を線形空間，$f: V\longrightarrow V'$ を線形写像とするとき

零空間(核)： $\mathrm{Ker}\,f=\{\boldsymbol{v}\in V\,;f(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}\}$,　　　像空間：$\mathrm{Im}\,f=\{f(\boldsymbol{v})\,;\boldsymbol{v}\in V\}$

はそれぞれV, V' の部分空間であり

$$\dim V=\dim \mathrm{Im}\,f+\dim \mathrm{Ker}\,f$$

が成り立つ．

に基づいて，4 つの基本部分空間と呼ばれるものを定義する．

さて

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\in M_{m,n}(\mathbb{R}) \qquad \text{ただし，} \mathrm{rank}\,A=r$$

に対して

$$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m)$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

で定義される写像f は，$\mathbb{R}^n$ から$\mathbb{R}^m$ への線形写像である．

また

$$^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots\cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

に対して

$$\boldsymbol{y} = {}^tA\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n)$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots\cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

で定義される写像g は，$\mathbb{R}^m$ から$\mathbb{R}^n$ への線形写像である．

ただし，行列の転置を考えることにより，g は

$$^t\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}A \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n)$$

すなわち

$$(y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n) = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_m) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と書き換えられることから，$M_{1,m}(\mathbb{R})$ から$M_{1,n}(\mathbb{R})$ への線形写像とみることもできる．

A の行ベクトルを $\boldsymbol{a}^{(s)}$ $(s = 1, \cdots, m)$， の列ベクトルを$\boldsymbol{a}_{(t)}$ $(t = 1, \cdots, n)$とおけば

$$A = (\ \boldsymbol{a}_{(1)} \quad \boldsymbol{a}_{(2)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_{(n)}\ ) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^{(1)} \\ \boldsymbol{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}^{(m)} \end{pmatrix},$$

$$^tA = \left({}^t\boldsymbol{a}^{(1)} \quad {}^t\boldsymbol{a}^{(2)} \quad \cdots \quad {}^t\boldsymbol{a}^{(m)}\right) = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_{(1)} \\ {}^t\boldsymbol{a}_{(2)} \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_{(n)} \end{pmatrix}$$

と表されることに留意されたい．

定義（4 つの基本部分空間）

1. A の行空間$\mathcal{R}({}^tA) = \langle\ {}^t\boldsymbol{a}^{(1)} \quad {}^t\boldsymbol{a}^{(2)} \quad \cdots \quad {}^t\boldsymbol{a}^{(m)}\ \rangle$: g の像空間（$\dim \mathrm{Im}\, g$）と呼ばれる$\mathbb{R}^n$ の部分空間.
2. A の零空間$\mathcal{N}(A) = \{\ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n\ ;\ A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0_m}\ \}$: f の零空間（核）（$\mathrm{Ker}\, f$）と呼ばれる$\mathbb{R}^n$ の部分空間.
3. A の列空間$\mathcal{R}(A) = \langle\ \boldsymbol{a_{(1)}} \quad \boldsymbol{a_{(2)}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a_{(n)}}\ \rangle$: f の像空間（$\dim \mathrm{Im}\, f$）と呼ばれる$\mathbb{R}^m$ の部分空間.
4. A の左零空間$\mathcal{N}({}^tA) = \{\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m\ ;\ {}^tA\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0_n}\ \}$: g の零空間（核）（$\mathrm{Ker}\, g$）と呼ばれる$\mathbb{R}^m$ の部分空間.

4 つの基本部分空間のそれぞれの次元については，定理 3. 1. 1 により以下の通りとなる.

$$\dim \mathcal{R}({}^tA) = \mathrm{rank}\ {}^tA = r\,,$$

$$\dim \mathcal{N}(A) = \dim \mathbb{R}^n - \mathrm{rank}\, A = n - r\,,$$

$$\dim \mathcal{R}(A) = \mathrm{rank}\, A = r\,,$$

$$\dim \mathcal{N}({}^tA) = \dim \mathbb{R}^m - \mathrm{rank}\, A = m - r\,.$$

例（直交部分空間）

(1)　$\mathcal{R}\left({}^tA\right) \perp \mathcal{N}(A)$である.

(2)　$\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}({}^tA)$である.

（証明）

(1)

$\boldsymbol{w} \in \mathcal{N}(A), \boldsymbol{v} \in \mathcal{R}({}^tA)$ とすると，$A\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}_m$ であり，ある$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$が存在して$\boldsymbol{v} = {}^tA\boldsymbol{x}$ となっている.

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{w}\boldsymbol{v} = {}^t\boldsymbol{w}{}^tA\boldsymbol{x} = {}^t(A\boldsymbol{w})\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{0}_m\boldsymbol{x} = 0$$

(2)

$\boldsymbol{w} \in \mathcal{N}({}^tA), \boldsymbol{v} \in \mathcal{R}(A)$ とすると，${}^tA\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}_n$ であり，ある$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在して$\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{x}$ となっている.

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{w}\boldsymbol{v} = {}^t\boldsymbol{w}\, A\boldsymbol{x} = {}^t({}^tA\boldsymbol{w})\boldsymbol{x} = {}^t\boldsymbol{0}_n\boldsymbol{x} = 0$$

（証明終）

3. 2 直交補空間

定義（直交補空間）

内積(,)をもつ計量線形空間 Vの任意の部分空間 W について，Wのすべてのベクトルと直交するV のベクトルの全体，すなわち

$$W^\perp = \{\boldsymbol{a} \in V\ ;\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{w}) = 0 \quad (\boldsymbol{w}\ \text{は}V\text{の任意の元})\}$$

はV の部分空間であり，$W^\perp$ は直交補空間と呼ばれる.

定理（直交補空間）

Vをn次元計量線形空間，W, W_1, W_2 をV の$r(< n)$次元部分空間とすれば，次のことが成り立つ．

(1) $V = W \oplus W^{\perp}$

(2) $\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$

(3) $(W^{\perp})^{\perp} = W$

一般には，$W \subset (W^{\perp})^{\perp}$ である．

(4) $W_1 \subset W_2$ ならば $W_2{}^{\perp} \subset W_1{}^{\perp}$

(5) $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1{}^{\perp} \cap W_2{}^{\perp}$

(6) $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1{}^{\perp} + W_2{}^{\perp}$

（証明）

(1)

$\{\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_r}\}$を W の 1 つの正規直交基底とする．

定理 2.2 により，これをV の正規直交基底$\{\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_n}\}$に拡大することができる．

このとき，Vの元$\boldsymbol{v}$に対して

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + x_r\boldsymbol{v_r} + x_{r+1}\boldsymbol{v_{r+1}} + \cdots + x_n\boldsymbol{v_n}$$

とする．そして$(\boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v})$ $(i = 1, \cdots, n)$ を考えると

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v_i}, v) &= (\boldsymbol{v_i},\ x_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + x_r\boldsymbol{v_r} + x_{r+1}\boldsymbol{v_{r+1}} + \cdots + x_n\boldsymbol{v_n}) \\ &= x_1(\boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_1}) + \cdots + x_i(\boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i}) + \cdots + x_n(\boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_n}) \\ &= x_i\end{aligned}$$

が成り立つ．

$\boldsymbol{v}$ が$W^{\perp}$ の元である，Wのすべての元と直交するための必要十分条件は，$\boldsymbol{v}$ が$\boldsymbol{v_1}, \cdots, \boldsymbol{v_r}$と直交すること，すなわち

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v_j}) = x_j = 0 \qquad (j = 1, \cdots, r)$$

である．これは

$$\boldsymbol{v} = x_{r+1}\boldsymbol{v_{r+1}} + \cdots + x_n\boldsymbol{v_n}$$

と同等である．よって，$V = W + W^{\perp}$であることがわかる．

また，$\boldsymbol{u} \in W \cap W^{\perp}$とすると，$\boldsymbol{u} \in W$かつ$\boldsymbol{u} \in W^{\perp}$だから

$$\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + x_r\boldsymbol{v_r} + 0\boldsymbol{v_{r+1}} + \cdots + 0\boldsymbol{v_n} = 0\boldsymbol{v_1} + \cdots + 0\boldsymbol{v_r} + x_{r+1}\boldsymbol{v_{r+1}} + \cdots + x_n\boldsymbol{v_n}$$

により，$x_k = 0$ $(k = 1, \cdots, n)$であるから$u = \boldsymbol{0}$，すなわち$W \cap W^{\perp} = \boldsymbol{0}$ が得られる．

よって，$V = W \oplus W^{\perp}$が示された．

(2)

(1)の結果と定理 2.3 により示される.

(3)

$\boldsymbol{x} \in W$とすると，$W^{\perp}$の任意の元$\boldsymbol{y}$に対して，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$である.

よって，$\boldsymbol{x} \in (W^{\perp})^{\perp}$であるから，$W \subset (W^{\perp})^{\perp}$が示された.

逆に，$\boldsymbol{x} \in (W^{\perp})^{\perp}$であれば，$\boldsymbol{x} \in V$だから(1)の結果により，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} \quad (\boldsymbol{x_1} \in W, \boldsymbol{x_2} \in W^{\perp})$と表される.

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_2}) = 0$, $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = 0$ だから

$$0 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_2}) = (\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_2}) = (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) + (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_2}) = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_2}) = \|\boldsymbol{x_2}\|^2$$

となる.

したがって，$\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{0}$であるから$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_1} \in W$により，$(W^{\perp})^{\perp} \subset W$が示される.

よって，$(W^{\perp})^{\perp} = W$が得られた.

(4)～(6)

証明略

（証明終）

例 1

計量線形空間$\mathbb{R}^3$（標準内積）において，$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$で生成される部分空間

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

の直交補空間$W^{\perp}$を求めよ.

（解答）

$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ が$W^{\perp}$ の元であるための必要十分条件は

$$-x + z = 0,\ 5x + y = 0$$

すなわち

$$x = t,\ y = -5t,\ z = t \qquad (t \text{ は任意定数})$$

だから

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} t \\ -5t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．したがって

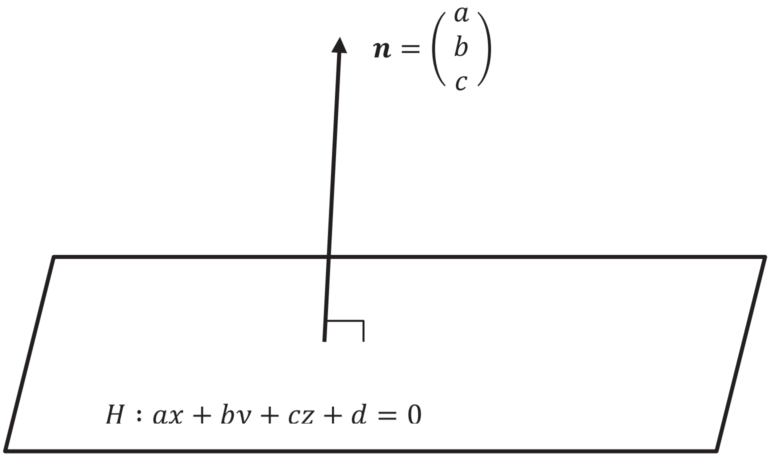
$$W^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

が得られる.

（解答終）

例 2

座標空間において，平面$H : ax+by+cz+d=0$ すなわち$H=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\,;\, ax+by+cz+d=0\right\}$ の法線ベクトルは，$\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$である．よって，直交補空間は法線ベクトル$\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$で生成される部分空間である，すなわち $H^{\perp}=\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle$ となる．



例 3（4 つの基本部分空間）

(1)　$\mathbb{R}^n=\mathcal{R}({}^tA)\oplus\mathcal{N}(A)$ すなわち $\mathcal{R}\left({}^tA\right)^{\perp}=\mathcal{N}(A)$.

(2)　$\mathbb{R}^m=\mathcal{R}(A)\oplus\mathcal{N}({}^tA)$ すなわち $\mathcal{R}(A)^{\perp}=\mathcal{N}({}^tA)$.

3.3 正射影（射影子）

V はW と$W^{\perp}$ の直和であり，$\boldsymbol{v}\in V$ であり

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}' \qquad (\boldsymbol{w}\in W, \boldsymbol{w}'\in W^{\perp})$$

と一意的に表される．

$\boldsymbol{v}\in V$ に対して，$\boldsymbol{w}\in W$ を対応させる線形写像（射影）をV からW への正射影（射影子）といい，$P_{V/W}$ と書く．

Wの正規直交基底を$\{\boldsymbol{u_1},\cdots,\boldsymbol{u_r}\}$ とすれば

$$P_{V/W}(v)=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u_1})\boldsymbol{u_1}+\cdots+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u_r})\boldsymbol{u_r} \qquad (\boldsymbol{v}\in V)$$

で与えられる．

参考文献

1) 岩永恭雄「入門線型代数学」日本評論社，2005
2) 硲野俊博，加藤芳文 共著「理工系の基礎線形代数学」学術図書，1994
3) 硲野俊博，山田浩，山辺元雄 共著「理工系の演習線形代数学」学術図書，2001
4) 根本精司「線形代数例題演習」森北出版,1980
5) 川久保勝夫「線形代数学」日本評論社，1999
6) 服部昭「線型代数学」朝倉書店，1982
7) 小寺平治「明解演習線形代数」共立出版，1982
8) 富永晃「基礎演習 線形代数」聖文社，1975
9) 松坂和夫「線型代数入門」岩波書店，1980
10) 三宅敏恒「線形代数学」培風館，2008
11) G. ストラング著，山口昌哉監訳，井上昭訳「線形代数とその応用」産業図書，1978