東海大学紀要情報通信学部
Vol.15,No.2,2022,pp.11-14

トピックス

大学初年次における数学教材の提案（その 43）
～ 内積と外積 ～

貴田 研司[*1]

A Suggestion on Mathematical Materials for Freshman Education Vol.43
~ Interior Product and Exterior Product ~

by

Kenshi KIDA[*1]

(received on Nov. 25, 2022 & accepted on Jan. 11, 2023)

あらまし

本論文においては，線形代数で学ぶ３次元数ベクトルの内積と外積について，四元数の積という見地からこの内積と外積と外積の関連性に言及する.

Abstract

In this paper, we give explanation of items for linear algebra. We refer to a relation between interior products and exterior products of 3-tuple vectors, from a viewpoint of products in quaternions.

キーワード：ベクトル，内積，外積，四元数，超複素数

Keywords: *Vector, Interior Product, Exterior Product, Quaternion, Hypercomplex Number*

1. はじめに

大学初年次で学ぶ線形代数などの科目において，３次元線形空間$\mathbb{R}^3$の２つのベクトル

$$\boldsymbol{a}=(a_1,\quad a_2,\quad a_3)=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3\,,\qquad \boldsymbol{b}=(b_1,\quad b_2,\quad b_3)=b_1e_1+b_2e_2+b_2e_2$$

$$（ただし，\quad \boldsymbol{e_1}=(1,0,0),\quad \boldsymbol{e_2}=(0,1,0),\quad \boldsymbol{e_3}=(0,0,1)）$$

に対して，内積および外積が次のように定義されることを学ぶ.

定義（内積（スカラー積，ドット積））

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

定義（外積（ベクトル積，クロス積））

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)\\&=(\,a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1\,)\\&=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{e_1}+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\boldsymbol{e_2}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{e_3}\\&=(\,a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e_1}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e_2}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e_3}\end{aligned}$$

ところが１人の大学院生の抱いた素朴な疑問として，行列の特殊な積 [1)]については

*1 理系教育センター 教授
STEM Education Center, Professor

例 1 （テンソル積（クロネッカー積））

$A=(a_{ij})$ が $m\times n$ 型行列，$B=(b_{ij})$が$p\times q$ 型行列のとき，テンソル積は

$$A\otimes B=(a_{ij}B)=\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

と定義される$mp\times nq$型行列である．

例 2（アダマール積（シューア積））

$A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})$ 共に $m\times n$ 型行列のとき，アダマール積は

$$A\circ B=(a_{ij}b_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{pmatrix}$$

で定義される$m\times n$ 型行列である．

という名前が付けられているのに対して，内積と外積という名前が付けられていることに何か特別な理由があるのではないかというものがあった．

本論文では，ハミルトンの四元数を用いて説明を試みる [2)3)]．

2. ハミルトンの四元数

記号$1,i,j,k$の形式的な実数係数一次結合全体

$$\mathbb{H}=\{x_0 1+x_1\,i+x_2\,j+x_3\,k\mid x_0,x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}\}$$

について，演算を次のように定義する．加法は成分ごと，乗法は

1 は単位元，

$i^2=-1,\ j^2=-1,\ k^2=-1,$

$ij=-ji=k,\ jk=-kj=i,\ ki=-ik=j$

に基づいて，分配法則と係数に関する交換法則を用いて行う．

（例：$2k(3i-j)=2k\cdot 3i+2k\cdot(-j)=2\cdot 3ki+2\cdot(-1)kj=6j+(-2)(-i)=2i+6j$）

$$(a_0 1+a_1\,i+a_2\,j+a_3\,k)(b_0 1+b_1\,i+b_2\,j+b_3\,k)$$

$$=a_0b_0+a_0b_1i+a_0b_2j+a_0b_3k$$

$$+a_1b_0i+a_1b_1i^2+a_1b_2ij+a_1b_3ik$$

$$+a_2b_0j+a_2b_1ji+a_2b_2j^2+a_2b_3jk$$

$$+a_3b_0k+a_3b_1ki+a_3b_2kj+a_3b_3k^2$$

$$=a_0b_0+a_0b_1i+a_0b_2j+a_0b_3k$$

$$+a_1b_0i - a_1b_1 + a_1b_2k - a_1b_3j$$

$$+a_2b_0j - a_2b_1k - a_2b_2 + a_2b_3i$$

$$+a_3b_0k + a_3b_1j - a_3b_2i - a_3b_3$$

$$= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3)$$

$$+(a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)i$$

$$+(a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1)j$$

$$+(a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)k$$

と定義される.

3. 内積と外積

ハミルトンの四元数の２つの元 $a_1\,i + a_2\,j + a_3\,k$と$b_1\,i + b_2\,j + b_3\,k$の積を計算すると

$$(a_1\,i + a_2\,j + a_3\,k)(b_1\,i + b_2\,j + b_3\,k)$$

$$= (-a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_2b_3 - a_3b_2)i + (-a_1b_3 + a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

$$= -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

となり，内積に相当する項と外積に相当する項が同時に現れることがわかる.

しかも，Fig.1 の示したように，集合の包含関係において，内積は実数の内側，外積は複数数の外側に位置することから，内積と外積と名付けられたのであろう.

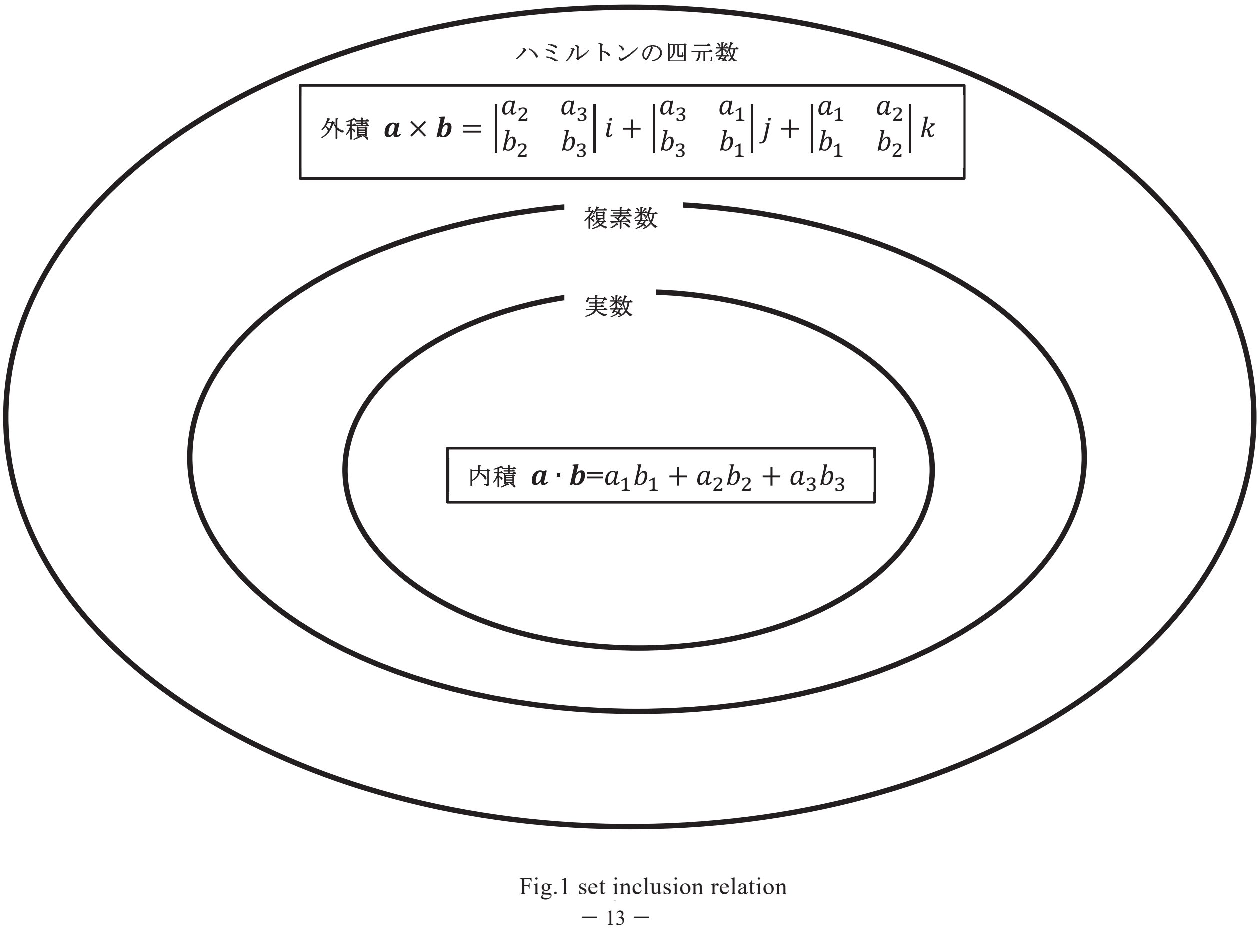

Fig.1 set inclusion relation

参考文献

1）C. ラダクリシュナ・ラオ・ S.K. ミトラ 著，渋谷政昭・田辺国士訳「一般逆行列とその応用」東京図書，1973
2）服部昭「現代代数学」朝倉書店，1968
3）L. S. ポント リャーギン 著宮本敏雄・保坂秀正訳「数概念の拡張」森北出版，1993